ЛЬВОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени ИВАНА ФРАНКО

ПРОФ. Л. И ВОЛКОВЫСКИЙ

КВАЗИКОНФОРМНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

ИЗДАТЕЛЬСТВО
ЛЬВОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
1954

Теория квазиконформных отображений представляет одно из современных направлений в развитии геометрической теории функций комплексного переменного и ее приложений к механике сплошной среды. Основы этой теории были построены академиком М. А. Лаврентьевым, получившим за свои работы в этом направлении Сталинскую премию I степени в 1947 году.

Настоящее учебное пособие представляет обработку конспекта лекций по спецкурсу „Квазиконформные отображения", которые автор читал на физико-математическом факультете Львовского государственного университета им. Ивана Франко для студентов, специализирующихся по теории функций.

Ответственный редактор
профессор Я. Б. Лопатинский

Печатается по распоряжению ректора Львовского университета члена-корреспондента АН УССР, профессора Е. К. Лазаренко

ВВЕДЕНИЕ

Конформные отображения характеризуются тем, что в малом они ведут себя как ортогональные преобразования. Естественным представляется рассмотрение таких отображений, которые в малом ведут себя как аффинные преобразования. В случае дифференцируемых отображений

$$u = u(x, y),\quad v = v(x, y),\quad J = u_x v_y - u_y v_x > 0, \tag{1}$$

поведение в малом определяется главной частью приращений

$$\Delta u = u(x + dx, y + dy) - u(x, y),$$
$$\Delta v = v(x + dx, y + dy) - v(x, y)$$

и имеет вид

$$du = u_x dx + u_y dy,\quad dv = v_x dx + v_y dy. \tag{2}$$

При этом, бесконечно малым кругам $du^2 + dv^2 = d\rho^2$ соответствуют бесконечно малые эллипсы:

$$(u_x^2 + v_x^2)\, dx^2 + 2(u_x u_y + v_x v_y)\, dx dy + (u_y^2 + v_y^2)\, dy^2 = d\rho^2. \tag{3}$$

С точностью до преобразования подобия и сдвига каждый эллипс характеризуется отношением $p = \frac{a}{b} \geqslant 1$ его полуосей a, b и углом Θ, образуемым большой его осью с осью x-ов.

Отображение (1) области D определяет в ней характеристики $p = p(z)$ и $\Theta = \Theta(z)$ (Θ определяется там, где $p \neq 1$).

Первая задача на пути к построению теории квазиконформных отображений заключалась в следующем: найти отображение (1) с заранее заданными характеристиками $p(z)$ и $\Theta(z)$. Для решения этой задачи потребовалось ослабить сделанные выше ограничения на отображение (1). Это было достигнуто заменой требования аффинности отображения в малом более слабым требованием, чтобы бесконечно малые эллипсы с характеристиками $p(z)$ и $\Theta(z)$ переходили в бесконечно малые круги, то есть, чтобы образ таких эллипсов лежал в кольцах с отношением радиусов, стремящихся к 1 при стягивании эллипсов в точку.

Первая основная задача квазиконформного отображения была поставлена и решена академиком М. А. Лаврентьевым в его работе [1]*, возникшей в связи с решением одной задачи на конформное отображение поверхностей. Попутио Д. Е. Меньшовым** была доказана важная теорема о том, что однолнстные отображения, переводящие бесконечно малые круги в бесконечно малые круги с сохранением направления обхода, являются конформными. Эта теорема приобрела особое значение в связи с вопросами единственности квазиконформных отображений.

В случае дифференцируемых квазиконформных отображений $f(z)=u+iv$ функции u, v удовлетворяют системе уравнений

$$\alpha u_x + \beta u_y = v_y, \quad \beta u_x + \gamma u_y = -v_x, \quad \alpha\gamma - \beta^2 = 1, \tag{4}$$

представляющей обобщение известной системы уравнений Коши-Римана, $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$. Учениками М. А. Лаврентьева Б. В. Шабатом, З. Я. Шапиро и другими изучались отображения, соответствующие более общим эллиптическим системам:

$$au_x + bu_y = v_y, \quad du_x + cu_y = -v_x, \quad ac - \left(\frac{b+d}{2}\right)^2 > 0. \tag{5}$$

Такие отображения характеризуются тем, что переводят бесконечно малые эллипсы в бесконечно малые эллипсы с данными характеристиками.

Развивая дальше теорию квазиконформных отображений, М. А. Лаврентьев поставил и решил следующую общую задачу квазиконформных отображений ([4], [5]): дана эллиптическая система

$$\Phi_1(x, y, u, v, u_x, u_y) = 0, \quad \Phi_2(x, y, u, v, u_x, u_y) = 0. \tag{6}$$

Требуется найти квазнконформное отображение $f(z) = u + iv$ области D на область Δ, соответствующее системе (6), то есть такое однолистное отображение D на Δ, которое удовлетворяет системе (6).

Теория квазиконформных отображений и ее приложения к геометрической теории функций, теории дифференциальных уравнений и механике сплошной среды только еще развиваются. В целях привлечения к ней большего внимания автором была предпринята попытка создания настоящего учебного пособия по теории квазиконформных отображений. В этом пособии подробно излагается первая основная работа М. А. Лаврентьева по теории квазиконформных отображений, теорема Д. Е. Меньшова, некоторые результаты Б. В. Шабата, П. П. Белинского и других авторов, а также некоторые приложения.

В §§ 1—3 излагаются свойства аффинных отображений

* Цитированная литература указана в конце; ссылки на нее указываются в квадратных скобках.

** Д. Е. Меньшов — профессор МГУ, лауреат Сталинской премии.

и в малом аффинных отображений, а также вводятся основные классы квазиконформных отображений. В §§ 4—7 излагаются в основном дифференциальные свойства однолистных квазиконформных отображений с двумя парами характеристик. Впрочем, требование однолистности там не столь существенно. В §§ 8—10 излагается теорема существования и единственности для квазиконформных отображений с одной парой характеристик и даются некоторые приложения. Случай двух пар характеристик, рассмотренный Б. В. Шабатом, мы отнесли ко второй предполагаемой части настоящего пособия.

Для удобства читателя в конце приводятся некоторые дополнительные сведения из разных разделов математики.

§ 1. АФФИННЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

1. 1. **Характеристики эллипса.** Характеристнками произвольного эллипса называются отношение $p \geqslant 1$ его полуосей и, если $p \neq 1$, угол $\Theta (0 \leqslant \Theta < \pi)$, образуемый большой его осью с осью x-ов.

Эти характеристики определяют эллипс с точностью до сдвига и преобразования подобия.

Уравненне эллипса с центром в начале координат, малой полуосью h и характеристиками p, Θ можно записать в виде

$$\gamma x^2 - 2\beta xy + \alpha y^2 = ph^2, \qquad (1)$$

где

$$\alpha = p \cos^2 \Theta + \frac{1}{p} \sin^2 \Theta, \quad \beta = \left(p - \frac{1}{p}\right) \cos \Theta \sin \Theta,$$

$$\gamma = p \sin^2 \Theta + \frac{1}{p} \cos^2 \Theta. \qquad (2)$$

В самом деле, преобразование к главным осям имеет вид

$$x_1 = x \cos \Theta + y \sin \Theta, \quad y_1 = -x \sin \Theta + y \cos \Theta$$

и приводит к уравнению

$$\frac{x_1^2}{(ph)^2} + \frac{y_1^2}{h^2} = 1,$$

откуда следует (2).

Величины α, β, γ связаны соотношением

$$\alpha\gamma - \beta^2 = 1 \qquad (3)$$

и также называются характеристиками эллипса. Если эллипс задан уравнением

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = D, \ AC - B^2 > 0, \ A > 0, \qquad (4)$$

то его характеристики α, β, γ определяются из соотношений

$$\frac{\gamma}{A} = -\frac{\beta}{B} = \frac{\alpha}{C} = \frac{ph^2}{D} = \frac{1}{\sqrt{AC - B^2}}, \qquad (5)$$

которые получаются из сравнения (1) с (4).

Из (2) следует, что

$$p+\frac{1}{p}=\alpha+\gamma,\ \operatorname{tg} 2\Theta=\frac{2\beta}{\alpha-\gamma},\ \beta \operatorname{tg}\Theta \geqslant 0, \tag{6}$$

откуда

$$\left.\begin{aligned} p=\frac{\alpha+\gamma}{2}+\sqrt{\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)^2-1}=\frac{\alpha+\gamma}{2}+\sqrt{\left(\frac{\alpha-\gamma}{2}\right)^2+\beta^2}, \\ \operatorname{tg}\Theta=\frac{\gamma-\alpha+\sqrt{(\gamma-\alpha)^2+4\beta^2}}{2\beta}. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Кроме того, имеем неравенства

$$\frac{1}{p}\leqslant\alpha,\ \gamma\leqslant p,\ |\beta|\leqslant\frac{1}{2}\left(p-\frac{1}{p}\right), \tag{8}$$

$$\left.\begin{aligned} &p-1\leqslant|\alpha-1|+|\beta|+|\gamma-1|, \\ &|\alpha-1|\leqslant p-1,\ |\beta|\leqslant 2(p-1),\ |\gamma-1|\leqslant p-1, \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

а также неравенства

$$\left.\begin{aligned} &|p-p_0|<|\alpha-\alpha_0|+|\beta-\beta_0|+|\gamma-\gamma_0|, \\ &\sin(\Theta-\Theta_0)|<\frac{1}{(p+p_0)\left(1-\frac{1}{pp_0}\right)}[|\alpha-\alpha_0|+ \\ &\qquad +2|\beta-\beta_0|+|\gamma-\gamma_0|], \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

$$\left.\begin{aligned} |\alpha-\alpha_0|<|p-p_0|+\left(p_0-\frac{1}{p_0}\right)|\Theta-\Theta_0|, \\ |\beta-\beta_0|<2\,|p-p_0|+\left(p_0-\frac{1}{p_0}\right)|\Theta-\Theta_0|, \\ |\gamma-\gamma_0|<|p-p_0|+\left(p_0-\frac{1}{p_0}\right)|\Theta-\Theta_0|, \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

сравнивающие близость между характеристиками p, Θ и p_0, Θ_0 с близостью между α, β, γ и α_0, β_0, γ_0.

Предоставляя читателю самому вывести указанные соотношения, отметим лишь, что первое из неравенств (10) получается из (7), если учесть неравенство

$$\left|\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{a_0^2+b_0^2}\right|\leqslant\sqrt{(a-a_0)^2+(b-b_0)^2}\leqslant$$
$$\leqslant|a-a_0|+|b-b_0|,$$

а неравенства (11) получаются из соотношений

$$\alpha-\alpha_0=(p-p_0)\left(\cos^2\Theta-\frac{1}{pp_0}\sin^2\Theta\right)-$$
$$-\left(p_0-\frac{1}{p_0}\right)\sin(\Theta-\Theta_0)\sin(\Theta+\Theta_0),$$

$$\beta-\beta_0=(p-p_0)\left(1+\frac{1}{pp_0}\right)\cos\Theta\sin\Theta+$$

$$+\left(p_0-\frac{1}{p_0}\right)\sin(\Theta-\Theta_0)\cos(\Theta+\Theta_0),$$

$$\gamma-\gamma_0=(p-p_0)\left(\sin^2\Theta-\frac{1}{pp_0}\cos^2\Theta\right)+$$

$$+\left(p_0-\frac{1}{p_0}\right)\sin(\Theta-\Theta_0)\sin(\Theta+\Theta_0),$$

приводящих также и ко второму из неравенств (10).

I. 2. **Аффинные отображения, переводящие круги в круги и сохраняющие углы.** Всякое невырожденное аффинное отображение $f(z)=u+iv$,

$$\begin{aligned} u&=a_{11}x+a_{12}y+a_{13}, \\ v&=a_{21}x+a_{22}y+a_{23}, \end{aligned}\qquad \Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}\neq 0 \tag{1}$$

производит взаимно однозначное непрерывное отображение плоскости $z=x+iy$ на плоскость $w=u+iv$, причем обратное преобразование $z=\varphi(w)$ также имеет вид (1). При этом прямые

$$Au+Bv+C=0,\ A^2+B^2\neq 0 \tag{2}$$

преобразуются в прямые

$$(Aa_{11}+Ba_{21})x+(Aa_{12}+Ba_{22})y=0, \tag{3}$$

а кривые второго порядка

$$Au^2+2Buv+Cv^2+2Du+2Ev+F=0 \tag{4}$$

преобразуются в кривые второго порядка

$$\left.\begin{aligned} &A_1x^2+2B_1xy+C_1y^2+2D_1x+2E_1y+F=0, \\ &A_1C_1-B_1^2=(AC-B^2)\Delta^2. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Из (3) следует, что параллельные прямые преобразуются в параллельные, а из (5), что эллипсы с кругами, гиперболы и параболы преобразуются соответственно в эллипсы с кругами, гиперболы и параболы.

Докажем следующую теорему:

Теорема I. 1. *Для того, чтобы аффинное отображение $f(z)$ переводило круги в круги или сохраняло углы необходимо и достаточно, чтобы оно имело вид*

$$f(z)=Az+B, \tag{6}$$

если углы сохраняются не только по величине, но и по направлению, и вид

$$f(z)=A\bar{z}+B, \tag{7}$$

если углы сохраняются только по величине.

Доказательство. Достаточность условий очевидна. Для доказательства их необходимости заметим, что в обоих случаях как при переводе кругов в круги, так и при сохранении углов, квадраты переходят в квадраты. Но для того, чтобы квадрат со сторонами, параллельными координатным осям, переходил в квадрат, необходимо, чтобы его стороны получили одинаковое растяжение и поворачивались либо на один и тот же угол, либо на углы, отличающиеся друг от друга на π. Для первого необходимо, чтобы $\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|=\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|$, а для второго — $\arg\frac{\partial f}{\partial x}=\pm\arg\left(\frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y}\right)$. Значит,

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\pm\frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y} \tag{8}$$

что эквивалентно тому, что $f(z)$ имеет вид (6) или (7).

Примечание. Необходимо заметить, что в случае (6) якобиан отображения $J=|A|^2>0$, а в случае (7) — $J=-|A|^2<0$.

I. 3. **Характеристики аффинного отображения.** Для общего случая невырожденного аффинного отображения I. 2 (1) особое значение имеют эллипсы, переходящие в круги. Они имеют одинаковые характеристики α, β, γ, определяемые из уравнения

$$(a_{11}^2+a_{21}^2)x^2+2(a_{11}a_{12}+a_{21}a_{22})xy+(a_{12}^2+a_{22}^2)y^2=\rho^2, \tag{1}$$

соответствующего, с точностью до сдвига, окружности

$$u^2+v^2=\rho^2. \tag{2}$$

Следовательно, в силу I. 1 (5),

$$\frac{\gamma}{a_{11}^2+a_{21}^2}=\frac{-\beta}{a_{11}a_{12}+a_{21}a_{22}}=\frac{\alpha}{a_{12}^2+a_{22}^2}=\frac{1}{|\Delta|}=\frac{ph^2}{\rho^2}. \tag{3}$$

Определяемые таким образом величины α, β, γ, а также соответствующие значения p, Θ, называются *характеристиками аффинного отображения.* В силу теоремы I. 1 они определяют аффинное отображение с точностью до целого линейного или сопряженного к нему преобразования.

В качестве *канонической формы аффинного отображения с характеристиками* p, Θ можно принять отображение

$$u=x\cos\Theta+y\sin\Theta,\quad v=p(-x\sin\Theta+y\cos\Theta), \tag{4}$$

состоящее из поворота на угол Θ и последующего растяжения вдоль оси ординат в p раз. Обратное к (4) отображение имеет вид

$$x = u \cos\Theta - \frac{v}{p} \sin\Theta, \quad y = u \sin\Theta + \frac{v}{p} \cos\Theta \tag{5}$$

и состоит из сжатия в p раз вдоль оси ординат и последующего поворота на угол Θ. Это приводит нас к теореме, известной из линейной алгебры:

Теорема I. 2. *Аффинное отображение с характеристиками p, Θ может быть разложено на последовательность следующих преобразований:*

1) *вращение*

$$x_1 = x \cos\Theta + y \sin\Theta, \quad y_1 = -x \sin\Theta + y \cos\Theta, \tag{6}$$

2) *растяжение*

$$x_2 = \lambda x_1, \; y_2 = p\lambda y_1 \quad (\lambda > 0) \tag{7}$$

или растяжение с зеркальным отражением

$$x_2 = \lambda x_1, \; y_2 = -p\lambda y_1 \tag{7'}$$

3) *вращение со сдвигом*

$$\begin{aligned} u &= x_2 \cos\varphi - y_2 \sin\varphi + \text{const}, \\ v &= x_2 \sin\varphi + y_2 \cos\varphi + \text{const}. \end{aligned} \tag{8}$$

Рассматривая преобразование характеристического эллипса (1) в окружность (2), заключаем, что при аффинном отображении с характеристиками p, Θ наименьшее растяжение происходит в направлении Θ и равно

$$\frac{\rho}{ph} = \sqrt{\frac{|\Delta|}{p}},$$

а наибольшее — в направлении $\Theta + \frac{\pi}{2}$ и равно

$$\frac{\rho}{h} = \sqrt{p|\Delta|}.$$

Таким образом, имеем следующую теорему:

Теорема I. 3. *При аффинном отображении $f(z) = u + iv$ с характеристиками p, Θ растяжение $\left|\frac{\partial f}{\partial s}\right|$ в направлении s удовлетворяет неравенству*

$$\frac{|\Delta|}{p} \leqslant \left|\frac{\partial f}{\partial s}\right|^2 \leqslant p|\Delta|, \tag{9}$$

слева с равенством для направления Θ и справа — для направления $\Theta + \frac{\pi}{2}$.

Отметим еще две простые теоремы:

Теорема I. 4. *Отображение, обратное к невырожденному аффинному отображению с определителем Δ, есть также невырожденное аффинное отображение с определителем $\frac{1}{\Delta}$ и с той же характеристикой p.*

Последнее можно записать так:

$$p_{z/w} = p_{w/z}. \tag{10}$$

Теорема I. 5. *При суперпозиции двух аффинных отображений с характеристиками p_1, p_2 получается аффинное отображение с характеристикой p_{12}, удовлетворяющей неравенству*

$$p_{12} \leqslant p_1 p_2. \tag{11}$$

В другой записи имеем:

$$p_{w/z} \leqslant p_{w/\zeta}\, p_{\zeta/z}. \tag{12}$$

Примечание. Если в теореме I, 5 характеристики первого преобразования p_1, Θ_1, второго — p_2, Θ_2 и $\Theta_{12} = \Theta_1 - \Theta_2$, то легко получить соотношение

$$p_{12} + \frac{1}{p_{12}} - 2 = \frac{(p_1 - p_2)^2}{p_1 p_2} \cos^2 \Theta_{12} + \frac{(p_1 p_2 - 1)^2}{p_1 p_2} \sin^2 \Theta_{12}, \tag{13}$$

из которого, учитывая (11), следует неравенство

$$p_{12} - 1 < |p_1 - p_2| + (p_1 p_2 - 1)\,|\sin(\Theta_1 - \Theta_2)|. \tag{14}$$

Доказательство предоставляем читателю.

I. 4. Вырожденные аффинные отображения. Аффинное отображение $f(z) = u + iv$,

$$\begin{aligned} u &= a_{11} x + a_{12} y + c_1 \\ v &= a_{21} x + a_{22} y + c_2 \end{aligned} \tag{1}$$

называется вырожденным, если определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 0, \tag{2}$$

но не все коэффициенты a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} равны нулю. В этом случае (1) приводится к виду

$$\begin{aligned} u &= \mu_1 (ax + by) + c_1 \\ v &= \mu_2 (ax + by) + c_2, \end{aligned} \tag{3}$$

где

$$\mu_1^2+\mu_2^2\neq 0,\quad a^2+b^2\neq 0. \tag{4}$$

Из (3) следует, что для любого направлення s производная

$$\frac{\partial f}{\partial s}=(\mu_1+i\mu_2)\frac{\partial(ax+by)}{\partial s}=(\mu_1+i\mu_2)\,[a\cos(s,x)+b\cos(s,y)]=$$

$$=(\mu_1+i\mu_2)\sqrt{a^2+b^2}\,[\cos(s_1,x)\cos(s,x)+\cos(s_1,y)\cos(s,y)],$$

где s_1 — направление, перпендикулярное к направлению прямых $ax+by=\text{const}$. Следовательно,

$$\frac{\partial f}{\partial s}=\frac{\partial f}{\partial s_1}\cos(s,s_1). \tag{5}$$

Это приводит к теореме, также известной из линейной алгебры:

Теорема I. 6. *Вырожденное аффинное преобразование* (1) *с точностью до целого линейного преобразования состоит из проектирования плоскости (x, y) на некоторую прямую s_1, перпендикулярную к прямым $ax+by=\text{const}$. Растяжение в направлении s_1 является максимальным и для всякого другого направления s растяжение*

$$\left|\frac{\partial f}{\partial s}\right|=\left|\frac{\partial f}{\partial s_1}\right|\,|\cos(s,s_1)|\,. \tag{6}$$

В самом деле, из (3) следует, что вся плоскость (x, y) преобразуется в прямую

$$\mu_2 u-\mu_1 v-c_1\mu_2+c_2\mu_1=0, \tag{7}$$

причем прямые $ax+by=\text{const}$ преобразуются в точки на прямой (7). Другие же прямые преобразуются во всю прямую (7), ибо растяжение вдоль них, в силу соотношения (6), следующего из (5), отлично от нуля.

Так как $\left|\frac{\partial f}{\partial s}\right|=\text{const}$ вдоль всякой прямой, то любую прямую, не параллельную прямым $ax+by=\text{const}$, можно перевести в прямую (7) с помощью целого линейного преобразования. Фиксируя прямую с направлением s_1, проектируя на нее плоскость (x, y) и строя для s_1 указанное целое линейное преобразование, эквивалентное $f(z)$, получим, в силу (6), все аффинное преобразование $f(z)$.

§ 2. ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫЕ ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

2. 1. Метрическое поведение отображения вблизи точки дифференцируемости. Условимся функцию $f(z)=u(z)+iv(z)$ называть *дифференцируемой в точке* z_0, если она однозначно определена в окрестности этой точки, имеет конечные частные производные $\frac{\partial f(z_0)}{\partial x}$, $\frac{\partial f(z_0)}{\partial y}$ и допускает вблизи z_0 представление в виде

$$f(z) = f(z_0) + \frac{\partial f(z_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f(z_0)}{\partial y}(y - y_0) + \\ + \varepsilon(z, z_0)(z - z_0), \tag{1}$$

где $\varepsilon(z, z_0) \to 0$ при $z \to z_0$.*

Введенное определение дифференцируемости $f(z)$ в точке z_0 эквивалентно требованию дифференцируемости в точке z_0 функций $u(z)$ и $v(z)$, то есть требованию, чтобы вблизи z_0 они допускали представление в виде

$$\left.\begin{aligned} u(z) &= u(z_0) + \frac{\partial u(z_0)}{\partial x}(x - x_0) - \frac{\partial u(z_0)}{\partial y}(y - y_0) + \\ &\quad + \varepsilon_1(z, z_0)\,|z - z_0|, \\ v(z) &= v(z_0) + \frac{\partial v(z_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial v(z_0)}{\partial y}(y - y_0) + \\ &\quad + \varepsilon_2(z, z_0)\,|z - z_0|, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

где ε_1, $\varepsilon_2 \to 0$ при $z \to 0$.

В частности, если $f(z)$ моногенна в точке z_0, то есть имеет в точке z_0 конечную производную $f'(z_0)$,

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0), \tag{3}$$

то $f(z)$ дифференцируема в точке z_0. При этом она в точке z_0 удовлетворяет уравнениям Коши-Римана:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{или, что эквивалентно,} \quad \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{i}\,\frac{\partial f}{\partial y}. \tag{4}$$

Как известно, из (1) и (4) следует (3). Значит, *для моногенности функции $f(z)$ в точке z_0 необходимо и достаточно, что она в этой точке была дифференцируема и удовлетворяла уравнениям Коши-Римана.*

Если $f(z)$ дифференцируема в точке z_0, то в любом направлении s она имеет определенную производную:

$$\frac{\partial f}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial s} + i\,\frac{\partial v}{\partial s}. \tag{5}$$

---

* Функцию $f(z)$, имеющую в точке z_0 конечную производную $f'(z_0)$, будем, как обычно, называть *моногенной в точке* z_0.

Следовательно, в случае непрерывности вблизи z_0, она имеет в направлении s растяжение

$$\Lambda_s = \left|\frac{\partial f}{\partial s}\right| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial s}\right)^2} \tag{6}$$

и, если $\Lambda_s \neq 0$, то $\arg\frac{\partial f}{\partial s}$ указывает преобразованное направление s.

Если $\frac{\partial f(z_0)}{\partial x} = \frac{\partial f(z_0)}{\partial y} = 0$, то $f(z)$ моногенна в точке z_0 и $f'(z_0) = 0$. Если же по крайней мере одна из указанных величин отлична от нуля, то в отношении дифференцируемости $f(z)$ в точке z_0 ведет себя как аффинное преобразование

$$f_1(z, z_0) = u_1(z, z_0) + iv_1(z, z_0) = f(z_0) + \\ + \frac{\partial f(z_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f(z_0)}{\partial y}(y - y_0), \tag{7}$$

$$\left.\begin{aligned} u_1(z, z_0) &= u(z_0) + \frac{\partial u(z_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial u(z_0)}{\partial y}(y - y_0), \\ v_1(z, z_0) &= v(z_0) + \frac{\partial v(z_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial v(z_0)}{\partial y}(y - y_0), \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

являющееся невырожденным, если якобиан $J(z_0) \neq 0$, и вырожденным, если $J(z_0) = 0$. В первом случае в любом направлении s производная $\frac{\partial f}{\partial s} \neq 0$, во втором же случае существует одно такое направление s_0, где $\frac{\partial f}{\partial s_0} = 0$; во всех же других направлениях $\frac{\partial f}{\partial s} \neq 0$, причем $\frac{\partial f}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial s_1}\cos(s, s_1)$, где s_1 — направление, перпендикулярное к s_0 (см. теорему I. 6). Таким образом, имеем следующую теорему:

Теорема 2. 1. *В точке z_0 дифференцируемости отображения $f(z)$ последнее может вести себя лишь следующим образом:*

1) *в любом направлении s производная $\frac{\partial f}{\partial s} = 0$; в этом случае $f(z)$ моногенна в точке z_0 и $f'(z_0) = 0$, а также якобиан $J(z_0) = 0$;*

2) *существует ровно одно направление s_0 такое, что $\frac{\partial f}{\partial s_0} = 0$; в этом случае якобиан $J(z_0) = 0$. Главная часть*

$f_1(z, z_0)$ разложения (1) *$f(z)$ вблизи z_0 есть вырожденное аффинное преобразование и в любом направлении s*

$$\frac{\partial f}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial s_1} \cos (s, s_1), \tag{9}$$

где $s_1 \perp s_0$;

3) *якобиан $J(z_0) \neq 0$; в этом случае $f_1(z, z_0)$ есть невырожденное аффинное отображение и в любом направлении s*

$$\frac{\partial f}{\partial s} = \frac{\partial f_1}{\partial s} \neq 0. \tag{10}$$

Напомним теперь следующее определение:

Функция $f(z)$, непрерывная вблизи точки z_0, обладает в этой точке постоянством растяжения, соответственно свойством сохранения углов, если существует предел

$$\lim_{z \to z_0} \left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right| = \gamma_1, \quad 0 < \gamma < \infty, \tag{11}$$

соответственно

$$\lim_{z \to z_0} \arg \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \varphi \tag{12}$$

или

$$\lim_{z \to z_0} \arg \frac{\overline{f(z)} - \overline{f(z_0)}}{z - z_0} = \varphi. \tag{12'}$$

Имеет место следующая теорема:

Теорема 2. 2. *Если функция $f(z)$ непрерывна вблизи z_0, дифференцируема в этой точке и обладает в ней постоянством растяжения или свойством сохранения углов, то $f(z)$ или $\overline{f(z)}$ моногенна в точке z_0.*

Доказательство. Из условий теоремы следует, что мы имеем первый или третий случай теоремы 2. 1. В первом случае $f'(z_0) = 0$, в третьем же случае соответствующее аффинное отображение $f_1(z, z_0)$ также обладает постоянством растяжения или свойством сохранения углов, откуда, в силу теоремы I. 1, $f_1(z, z_0)$ или $\overline{f_1(z, z_0)}$ есть целая линейная функция. Следовательно, $f(z)$ или $\overline{f(z)}$ моногенна в точке z_0.

2. 2. Точки аффинности отображения и отображение бесконечно малых эллипсов в бесконечно малые круги. Имеет место следующая теорема:

Если функция $w = f(z)$ непрерывна и однолистна в области D, то множество значений $\Delta = f(D)$ пред-*

* Отображение $f(z)$ называется однолистным, если $f(z_1) \neq f(z_2)$ для любых $z_1 \neq z_2$.

*ставляет собой область и обратная функция $z=\varphi(w)$ непрерывна в Δ**.

Так как взаимно однозначное и взаимно непрерывное отображение называется, как известно, топологическим или гомеоморфным, то между D и Δ устанавливается топологическое соответствие**.

Заметив это, введем следующее определение:

Определение 2. 1. *Точка z_0 называется A-точкой или точкой аффинности отображения $f(z)$, если последнее непрерывно и однолистно вблизи z_0, дифференцируемо в этой точке и якобиан $J(z_0) \neq 0$.*

Из приведенной выше теоремы следует, что окрестность A-точки z_0 отображается гомеоморфно на окрестность точки $f(z_0)$. На основании теоремы 2. 1. заключаем, что вблизи A-точки z_0 отображение $f(z)$ как метрически, так и топологически ведет себя как невырожденное аффинное преобразование $f_1(z, z_0)$,

$$f_1(z, z_0)=f(z_0)+\frac{\partial f(z_0)}{\partial x}(x-x_0)+\frac{\partial f(z_0)}{\partial y}(y-y_0).$$

Примерами A-точек могут служить точки, где отображение $f(z)=u+iv$ непрерывно дифференцируемо и якобиан $J(z) \neq 0$, что следует из теорем о неявных функциях, примененных к системе

$$u=u(x, y), \quad v=v(x, y). \tag{1}$$

Обозначая через $E_h(p, \Theta;\ z_0)$ эллипс

$$\gamma(x-x_0)^2-2\beta(x-x_0)(y-y_0)+\alpha(y-y_0)^2=ph^2, \tag{2}$$

с центром в точке z_0, малой полуосью h и характеристиками p, Θ или α, β, γ, введем, следуя М. А. Лаврентьеву [1], следующее определение:

Определение 2. 2. *Функция $f(z)$ отображает бесконечно малый эллипс $E_h(p, \Theta;\ z_0)$ в бесконечно малый круг, если отображение непрерывно и однолистно вблизи z_0 и удовлетворяет условию*

$$\lim_{h\to 0}\frac{\max\limits_{z\in E_h}|f(z)-f(z_0)|}{\min\limits_{z\in E_h}|f(z)-f(z_0)|}=1. \tag{3}$$

---

* Доказательство см. у А. И. Маркушевича „Теория аналитических функций“, 1950, гл. I, § 6.

** Относительно топологических отображений вообще и в частности их свойства сохранения области см. П. С. Александров „Комбинаторная топология“, 1947 и Г. М. Голузин „Геометрическая теория функций комплексного переменного“, 1952, гл. V, § 7.

В частности, если $p=1$, то (3) определяет отображение бесконечно малого круга в бесконечно малый круг.

Теорема 2. 3. *Если z_0 A-точка отображения $f(z)$ и p, Θ характеристики аффинного преобразования $f_1(z, z_0)$, то $f(z)$ отображает бесконечно малый эллипс $E_h(p, \Theta; z_0)$ в бесконечно малый круг.*

Доказательство. Из условий теоремы следует, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\eta = \eta(\varepsilon)$, что для $|z - z_0| < \eta$ модуль $|f(z) - f_1(z, z_0)| < \varepsilon |z - z_0|$. Аффинное отображение $f_1(z, z_0)$ переводит эллипсы E_h в круги $|f_1(z, z_0) - f(z_0)| = \rho$, где $\rho = \rho(h)$. Кроме того, мы знаем, что на E_h

$$\sqrt{\frac{|J|}{p}} \leqslant \left|\frac{f_1(z, z_0) - f(z_0)}{z - z_0}\right| \leqslant \sqrt{p|J|}, \quad J = J(z_0)$$

(см. теорему 1. 3). Поэтому, если z', z'' точки на E_h, где $|f(z) - f(z_0)|$ достигает максимума, соответственно минимума, то для $ph < \eta$ имеем

$$\frac{|f(z') - f(z_0)|}{|f(z'') - f(z_0)|} < \frac{|f_1(z', z_0) - f(z_0)| + \varepsilon |z' - z_0|}{|f_1(z'', z_0) - f(z_0)| - \varepsilon |z'' - z_0|} =$$

$$= \frac{\rho(h) + \varepsilon |z' - z_0|}{\rho(h) - \varepsilon |z'' - z_0|} \leqslant \frac{1 + \varepsilon \sqrt{\frac{p}{|J|}}}{1 - \varepsilon \sqrt{\frac{1}{p|J|}}}.$$

Следовательно,

$$\overline{\lim_{h \to 0}} \frac{|f(z') - f(z_0)|}{|f(z'') - f(z_0)|} \leqslant \frac{1 + \varepsilon \sqrt{\frac{p}{|J|}}}{1 - \varepsilon \sqrt{\frac{1}{p|J|}}},$$

откуда, ввиду произвольной малости ε, следует (3).

Что же можно сказать о дифференцируемости $f(z)$ в точке z_0, если известно только, что $f(z)$ отображает бесконечно малый эллипс $E_h(p, \Theta; z_0)$ в бесконечно малый круг? В общем случае дифференцируемость отсюда не следует, однако имеет место следующая теорема:

Теорема 2. 4. *Если функция $f(z)$ отображает бесконечно малый эллипс $E_h(p, \Theta; z_0)$ в бесконечно малый круг и имеет конечное отличное от нуля растяжение $\left|\frac{\partial f}{\partial s_0}\right|$ в неко-*

тором направлении s_0, то $f(z)$ имеет определенное растяжение в любом другом направлении s, причем

$$\frac{1}{p}\left|\frac{\partial f}{\partial s_0}\right| \leqslant \left|\frac{\partial f}{\partial s}\right| \leqslant p\left|\frac{\partial f}{\partial s_0}\right| \tag{4}$$

и якобиан $J(z_0) \neq 0$.

Доказательство. В самом деле, взяв приращения Δz в направлениях s и s_0 до эллипса E_h, будем иметь

$$\lim_{h\to 0}\frac{|\Delta f|_s}{|\Delta f|_{s_0}} = 1, \quad \lim_{h\to 0}\frac{|\Delta f|_{s_0}}{|\Delta z|_{s_0}} = \left|\frac{\partial f}{\partial s_0}\right|,$$

следовательно, существует предел

$$\lim_{h\to 0}\frac{|\Delta f|_s}{|\Delta z|_s} = \left|\frac{\partial f}{\partial s_0}\right| \cdot \lim_{h\to 0}\frac{|\Delta z|_{s_0}}{|\Delta z|_s},$$

откуда следует (4).

Теорема 2. 5. *Если функция $f(z)$ дифференцируема в точке z_0 и отображает бесконечно малый эллипс $E_h(p, \Theta; z_0)$ в бесконечно малый круг, то, либо $f'(z_0) = 0$, либо z_0 A-точка $f(z)$.*

Доказательство. Если $J(z_0) \neq 0$, то z_0 очевидно A-точка $f(z)$. Если же $J(z) = 0$, то, либо $f'(z_0) = 0$, либо существует лишь одно направление s_0 такое, что $\frac{\partial f}{\partial s_0} = 0$. Но последнее невозможно в силу (4).

Как следствие получаем следующую теорему:

Теорема 2. 6. *Если функция $f(z)$ дифференцируема в точке z_0 и отображает бесконечно малый круг в бесконечно малый круг, то $f(z)$ или $\overline{f(z)}$ моногенна в точке z_0.*

Доказательство. $f'(z_0) = 0$, либо z_0 A-точка $f(z)$, причем в этой точке $f(z)$ имеет постоянное растяжение и утверждение следует из теоремы 2. 2.

Отметим еще две теоремы:

Теорема 2. 7. *Если z_0 A-точка отображения $w = f(z)$, то $w_0 = f(z_0)$ A-точка обратного отображения $z = \varphi(w)$.*

Доказательство. В самом деле, непрерывность и однолистность $\varphi(w)$ вблизи w_0 следует из того, что z_0 A-точка отображения $f(z)$; дифференцируемость же $\varphi(w)$ в точке w_0 следует из общих теорем о дифференцируемости неявных функций $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, определяемых из (1).

Отметим соотношения

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial x}{\partial u}=\frac{1}{J}\frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial x}{\partial v}=-\frac{1}{J}\frac{\partial u}{\partial y},\\
&\frac{\partial y}{\partial u}=-\frac{1}{J}\frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial y}{\partial v}=\frac{1}{J}\frac{\partial u}{\partial x},\\
&J_1=\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}-\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}=\frac{1}{J}.
\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Теорема 2. 8. *Если ζ_0 A-точка отображения $\zeta=\varphi(z)$ и $\zeta_0=\varphi(z_0)$ A-точка отображения $w=f(\zeta)$, то z_0 A-точка сложного отображения $w=F(z)=f[\varphi(z)]$.*

Доказательство очевидно.

В заключение приведем некоторые соотношеиия между частными производными и характеристиками p, Θ и α, β, γ для A-точки отображения $f(z)=u+iv$. Рассматривая аффинное отображение $f(z)=u+iv$ и вспоминая соответствующие формулы § 1, получаем

$$\frac{\gamma}{u_x^2+v_x^2}=\frac{-\beta}{u_x u_y+v_x v_y}=\frac{\alpha}{u_y^2+v_y^2}=\frac{1}{|J|}, \tag{6}$$

$$\left\{\begin{aligned}
&p+\frac{1}{p}=\frac{u_x^2+u_y^2+v_x^2+v_y^2}{|J|}=2K,\\
&p=K+\sqrt{K^2-1}\\
&\operatorname{tg}\theta=\frac{(u_x^2+v_x^2)^2-(u_y^2+v_y^2)+\sqrt{(u_x^2+v_x^2+u_y^2+v_y^2)^2-4(u_xv_y-u_yv_x)^2}}{-2(u_xu_y+v_xv_y)},
\end{aligned}\right. \tag{7}$$

$$\frac{|J|}{p}\leqslant\left|\frac{\partial f}{\partial s}\right|^2\leqslant p|J|. \tag{8}$$

Эти же соотношения получатся из рассмотрения отображения

$$du=u_xdx+u_ydy,\ dv=v_xdx+v_ydy, \tag{9}$$

переводящего бесконечно малый круг

$$du^2+dv^2=d\rho^2 \tag{10}$$

в бесконечно малый эллипс

$$\gamma d_x^2-2\beta dxdy+\alpha dy^2=pdh^2, \tag{11}$$

причем

$$d\rho^2=|J|pdh^2, \tag{12}$$

откуда

$$du^2+dv^2=|J|(\gamma dx^2-2\beta dxdy+\alpha dy^2), \tag{13}$$

что эквивалентно (6). Такой способ рассмотрения метрического поведения отображения $f(z)$ в малом оправдан предыдущими рассуждениями для точек дифференцируемости $f(z)$, где якобиан отличен от нуля (см. теорему 2. 1), в частности для A-точек отображения.

§ 3. РАЗЛИЧНЫЕ КЛАССЫ КВАЗИКОНФОРМНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

3. 1. Квазиконформные отображения с одной парой характеристик. Мы скажем, что в области D плоскости z задано *непрерывное распределение характеристик* p, Θ, если $p=p(z)\geqslant 1$ определена и непрерывна всюду в D, а $\Theta=\Theta(z)$, $0\leqslant\Theta<\pi$ определена только там, где $p\neq 1$ и непрерывна в любой замкнутой подобласти $\overline{D}_1\subset D$, не содержащей точек, где $p=1$. Это эквивалентно заданию в D непрерывных функций $\alpha(z)$, $\beta(z)$, $\gamma(z)$, удовлетворяющих условиям α, $\gamma>0$, $\alpha\gamma-\beta^2=1$ и связанных с p,Θ известными соотношениями (см. I. 1).

Определение 3. 1. *Пусть в области D плоскости z задано непрерывное распределение характеристик p, Θ. Функция $f(z)$ производит квазиконформное отображение области D с характеристиками p, Θ, если она непрерывна и однолистна в D и для любой точки $z\in D$ преобразует бесконечно малый эллипс $E_h(p,\Theta\,;z)$ в бесконечно малый круг с сохранением направления обхода.*

Ниже (§ 9) будет доказана следующая основная теорема, принадлежащая М. А. Лаврентьеву [1]:

Какова бы ни была плоская область D и каково бы ни было непрерывное распределение в ней характеристик p, Θ, существует квазиконформное отображение области D с этими характеристиками, определенное с точностью до конформного отображения.

Пока отметим лишь следующее. Метрические требования, содержащиеся в требовании квазиконформности отображения, слабее требования его дифференцируемости. Однако, как будет показано в § 4, квазиконформное отображение дифференцируемо почти всюду. В связи с этим и особенно для приложений важна следующая теорема:

Теорема 3. 1. *В точках дифференцируемости квазиконформного отображения $f(z)=u+iv$ области D с характеристиками α, β, γ функции u, v удовлетворяют системе уравнений*

$$\alpha u_x+\beta u_y=v_y,\quad \beta u_x+\gamma u_y=-v_x. \tag{1}$$

Доказательство. Пусть $z_0\in D$ — точка дифференцируемости $f(z)$. По теореме 2. 5 $f'(z_0)=0$ и очевидно удовлетворяет системе (1), либо z_0 A-точка отображения $f(z)$. Но тогда, в силу 2. 2 (6),

$$\frac{u_x^2+v_x^2}{\gamma}=\frac{u_xu_y+v_xv_y}{-\beta}=\frac{u_y^2+v_y^2}{\alpha}=J, \tag{2}$$

откуда легко получаем систему (1).

Примечание. Заметим, что систему (1) можно записать в виде

$$\alpha v_x+\beta v_y=-u_y,\ \beta v_x+\gamma v_y=u_x \tag{3}$$

и что якобиан

$$J=\alpha u_x^2+2\beta u_xu_y+\gamma u_y^2. \tag{4}$$

Относительно A-точек справедлива

Теорема 3. 2. *Если в A-точке z отображения $f(z)$ удовлетворяется система (1), то $f(z)$ отображает бесконечно малый эллипс $E_h(p, \Theta; z)$ в бесконечно малый круг.*

Доказательство. В самом деле, из (1) и (3) следует (2), откуда следует утверждение.

Сопоставляя теоремы 3. 1 и 3. 2, приходим к следующей теореме:

Теорема 3. 3. *Для того чтобы в A-точке z отображение $f(z)=u+iv$ имело данные характеристики α, β, γ, необходимо и достаточно, чтобы в этой точке функции u, v удовлетворяли системе* (1).

Докажем еще такую теорему:

Теорема 3. 4. *Пусть z_0 A-точка отображения $w=f(z)=u+iv$ и $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ соответствующие характеристики. Для того чтобы функция $\zeta=\varphi(w)$, непрерывная и однозначная вблизи точки $w_0=f(z_0)$, была моногенна в этой точке, необходимо и достаточно, чтобы функция $\zeta=\psi(z)=\varphi[f(z)]=\xi+i\eta$ в точке z_0 была дифференцируема и удовлетворяла системе уравнений*

$$\alpha_0\xi_x+\beta_0\xi_y=\eta_y,\ \beta_0\xi_x+\gamma_0\xi_y=-\eta_x. \tag{5}$$

Доказательство. Так как z_0 A-точка отображения $f(z)$, то в ней функции u, v удовлетворяют системе

$$\alpha_0u_x+\beta_0u_y=v_y,\ \beta_0u_x+\gamma_0u_y=-v_x,$$

эквивалентной соотношению

$$du^2+dv^2=J_{w/z}(z_0)\,(\gamma_0dx^2-2\beta_0dxdy+\alpha_0dy^2).$$

Если $\varphi(w)$ моногенна в точке w_0, то, либо $\varphi'(w_0)=0$, тогда и $\psi'(z_0)=0$, либо $\varphi'(w_0)\neq 0$, тогда

$$d\xi^2+d\eta^2=|\varphi'(w_0)|^2(du^2+dv^2).$$

Следовательно,

$$d\xi^2 + d\eta^2 = |\varphi'(w_0)|^2 J_{w/z}(z_0)(\gamma_0 dx^2 - 2\beta_0 dx dy + \alpha_0 dy^2),$$

откуда следует (5). Если же $\psi(z)$ дифференцируема в точке z_0, то $\varphi(w)$ дифференцируема в точке w_0, ибо $J_{w/z}(z_0) \neq 0$.

Если при этом $\psi'(z_0) = 0$, то и $\varphi'(w_0) = 0$, если же не выполняется условие $\psi'(z_0) = 0$, то из (5) следует, что

$$d\xi^2 + d\eta^2 = J_{\zeta/z}(z_0)(\gamma_0 dx^2 - 2\beta_0 dx dy + \alpha_0 dy^2),$$

значит,

$$d\xi^2 + d\eta^2 = J_{\zeta/z} J_{z/w}(du^2 + dv^2),$$

откуда следует моногенность $\varphi(w)$ в точке w_0.

Примечание. Можно было бы доказательство теоремы 3. 4 вести непосредственно, используя формулы для замены переменных при дифференцировании.

3. 2. Квазиконформные отображения с двумя парами характеристик. Вводя выше общее понятие отображения, переводящего бесконечно малый эллипс в бесконечно малый круг, мы пришли к классу квазиконформных отображений вообще не всюду дифференцируемых, но обладающих в малом определенными аффинными свойствами. В некоторых случаях целесообразно этот класс расширить, рассматривая отображения, переводящие бесконечно малые эллипсы в бесконечно малые эллипсы. Вот соответствующие определения (см. [2]):

Определение 3. 2. *Функция $w = f(z)$ отображает бесконечно малый эллипс $E_h(p, \Theta; z)$ в бесконечно малый эллипс с центром в точке $w_0 = f(z_0)$ и характеристиками p_1, Θ_1, если отображение непрерывно и однолистно вблизи z_0 и кривая $f(E_h)$ может быть заключена между двумя концентрическими эллипсами $E_{h'_1}(p_1, \Theta_1; w_0)$, $E_{h''_1}(p_1, \Theta_1; w_0)$, где $h_1' \leqslant h_1''$ так, что выполняется соотношение*

$$\lim_{h \to 0} \frac{h'_1}{h''_1} = 1. \qquad (1)$$

Определение 3. 3. *Пусть в области D плоскости z задано непрерывное распределение двух пар характеристик $p(z)$, $\Theta(z)$ и $p_1(z)$, $\Theta_1(z)$. Функция $w = f(z)$ производит квазиконформное отображение области D с двумя парами характеристик $p, \Theta; p_1, \Theta_1$, если она непрерывна и однолистна в D и для всякой точки $z_0 \in D$ преобразует бесконечно малый эллипс $E_h(p(z_0), \Theta(z_0); z_0)$ в бесконечно малый эллипс с центром в точке $w_0 = f(z_0)$ и характеристиками $p_1(z_0)$, $\Theta_1(z_0)$, сохраняя направление обхода.*

Докажем следующую теорему:

Теорема 3. 5. В точках дифференцируемости квазиконформного отображения $f(z)=u+iv$ области D с двумя парами характеристик $p, \Theta; p_1, \Theta_1$, функции u, v удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{aligned} \alpha u_x+(\beta+\beta_1)\, u_y&=\alpha_1 v_y, \\ (\beta-\beta_1)\, u_x+\gamma u_y&=-\alpha_1 v_x, \end{aligned} \tag{2}$$

где $\alpha, \beta, \gamma; \alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ характеристики, соответствующие p, Θ и p_1, Θ_1.

Доказательство. Пусть z точка дифференцируемости $f(z)$. Тогда либо $f'(z_0)=0$ и система (2) удовлетворяется тривиальным образом, либо якобиан $J(z_0)\neq 0$ (доказательство последнего аналогично доказательству теоремы 2. 4, которую легко сформулировать и для случая отображения бесконечно малого эллипса в бесконечно малый эллипс).

В этом случае отображение $f(z)$ в малом ведет себя как аффинное отображение

$$du=u_x dx+u_y dy,\ dv=v_x dx+v_y dy. \tag{3}$$

Но отображение (3) переводит бесконечно малый эллипс $E_{dh}(p, \Theta; z)$ в бесконечно малый эллипс $E_{dh_1}(p_1, \Theta_1; w)$ лишь тогда, когда

$$\gamma_1 du^2-2\beta_1 du dv+\alpha_1 dv^2=J(z)\,(\gamma dx^2-2\beta dx dy+\alpha dy^2). \tag{4}$$

Подставляя сюда (3), получаем соотношения

$$\begin{cases} \gamma_1 u_x^2-2\beta_1 u_x v_x+\alpha_1 v_x^2=J\gamma, \\ \gamma_1 u_x u_y-\beta_1(u_x v_y+u_y v_x)+\alpha_1 v_x v_y=-J\beta, \\ \gamma_1 u_y^2-2\beta_1 u_y v_y+\alpha_1 v_y^2=J\alpha. \end{cases} \tag{5}$$

Исключая γ из последних двух соотношений, а затем из первых двух, получим уравнения (2).

Примечание. Систему (2) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \alpha v_x+(\beta-\beta_1)\, v_y&=-\gamma_1 u_y \\ (\beta+\beta_1)\, v_x+\gamma v_y&=\gamma_1 u_x \end{aligned} \tag{6}$$

и якобиан

$$J=\frac{1}{a_1}\,(\alpha u_x^2+2\beta u_x u_y+\gamma u_y^2). \tag{7}$$

В качестве обращения теоремы 3.5 можно рассматривать следующую теорему:

Теорема 3. 6. *Если z А-точка отображения $f(z) = u + iv$ и в этой точке функции u, v удовлетворяют системе* (2), *то $f(z)$ отображает бесконечно малый эллипс $E_h(p, \Theta; z)$ в бесконечно малый эллипс с центром в точке $f(z)$ и характеристиками p_1, Θ_1.*

Доказательство. В самом деле так как в рассматриваемой точке $J \neq 0$, то из (2) и (6) легко получаем (5), откуда следует (4), что эквивалентно утверждению.

3. 3. Неоднолистные, квазилинейные и нелинейные классы квазиконформных отображений.

1°. Требование однолистности, которое мы до сих пор предъявляли к квазиконформным отображениям, становится иногда стеснительным. Допуская многолистность отображения, естественно подчинить ее требованию соответствия характеру многолистности аналитических отображений, то есть отображений, осуществляемых с помощью аналитических функций. Но отображение с помощью аналитической функции однолистно всюду, исключая изолированные точки, вблизи которых оно ведет себя как степень. Поэтому, вводя в рассмотрение многолистные квазиконформные отображения, естественно потребовать, чтобы они также были однолистны всюду, исключая лишь изолированные точки; в последних же, то есть точках многолистности, отображение должно вести себя как степень с точностью до топологического преобразования, другими словами, в окрестности такой точки рассматриваемое отображение должно быть представимо в виде суперпозиции топологического отображения и последующего отображения посредством степени.

Таким образом приходим к следующему определению:

Определение. 3. 4. *Пусть в области D плоскости z задано непрерывное распределение одной или двух пар характеристик. Функция $f(z)$ производит квазиконформное отображение области D с указанными характеристиками, если, исключая изолированные точки, она производит однолистное квазиконформное отображение с указанными характеристиками; вблизи же исключенных точек, — точек многолистности, $f(z)$ с точностью до топологической деформации ведет себя как степень.*

Примечание. Если совсем отказаться от метрических свойств аналитических отображений, но сохранить только их геометрические, точнее, топологические свойства, то есть свойства, инвариантные относительно топологических преобразований исходной области, то, оказывается, остается лишь следующее: 1) непрерывность, 2) свойство переводить внутренние точки во внутренние точки, следовательно, область в область (свойство сохранения области) и 3) свойство не переводить континуум в точку. Отображения, обладающие указанными свойствами, называются внутренними и были введены и систематически изучены румынским математиком С. Стоиловым*. Ему, в частности, принадлежит следующий основной результат: *всякое внутреннее отображение можно представить в виде суперпозиции топологического и последующего аналитического отображения.* Справедливо, очевидно, и обратное. Из этого результата следует, что точки многолистности внутреннего отображения расположены изолированно и что, с точностью до топологических деформаций, отображение в окрестности таких точек ведет себя как степень. Это обстоятельство и было нами выше использовано в определении 3. 4. Таким образом, квазиконформные отображения включаются в более общий класс внутренних отображений.

2°. В определении 3.3 квазиконформных отображений с двумя парами характеристик мы предполагали их заданными в одной и той же области D плоскости z. Однако роль обоих пар характеристик здесь явно неравноправна. В то время, как для любой точки $z \in D$ мы имеем характеристики преобразуемого эллипса, для его образа есть только характеристики, положение же его центра $f(z)$ определяется вместе с самим отображением. Такое неравноправное положение устраняется при следующей, более общей, точке зрения (см. [3]).

Пусть нам даны область D в плоскости z, область Δ в плоскости w и две пары характеристик p, Θ; p_1, Θ_1, определенные и непрерывные для всех пар z, w из D и Δ, другими словами нам дано непрерывное распределение характеристик в области $D \times \Delta$ четырехмерного пространства z, w. Функция $w=f(z)$ осуществляет квазиконформное отображение D на Δ с указанными характеристиками, если для любой точки $z \in D$ бесконечно малый эллипс $E_h(p(z, w), \Theta(z, w); z)$ переходит в бесконечно малый эллипс с центром в точке $f(z)$ и характеристиками $p_1(z, w)$, $\Theta_1(z, w)$. Для точек дифференцируемости таких отображений получаются те же системы уравнений 3. 2 (2), что и выше, но коэффициенты ее зависят теперь от z и w, поэтому такая система является квазилинейной. Отсюда, рассмотренные выше квазиконформные отображения называются *линейными,* а указанные сейчас — *квазилинейными.*

3°. Все предыдущее охватывается следующей общей постановкой задачи о квазиконформных отображениях, рассмотренной академиком М. А. Лаврентьевым в его работах [4, 5].

---

* См. S. Stoïlow. Leçons sur les principes topologiques de la théorie des fonctions analytiques, Paris, 1938. См. также А. И. Маркушевич. „Теория аналитических функций", 1950, гл. VIII, § 2.

Система уравнений

$$\begin{aligned} \Phi_1(x, y, u, v, u_x, u_y, v_x, v_y) = 0 \\ \Phi_2(x, y, u, v, u_x, u_y, v_x, v_y) = 0 \end{aligned} \tag{1}$$

эллиптического типа допускает квазиконформное отображение области D плоскости (x, y) на область Δ плоскости (u, v), если существует гомеоморфное отображение D на Δ, осуществляемое функциями

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y), \tag{2}$$

удовлетворяющими системе (1). *Отображение* (2) *называется квазиконформным, соответствующим системе* (1).

§. 4. ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТЬ КВАЗИКОНФОРМНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

В дальнейшем, до § 8, будем рассматривать однолистные квазиконформные отображения плоской области D с двумя непрерывно распределенными в ней парами характеристик.

4. 1. Леммы о растяжении. Введем следующее определение:

Определение 4. 1. *Если характеристики p, p_1 квазиконформного отображения $w = f(z)$ области D удовлетворяют условию*

$$p \leqslant Q, \ p_1 \leqslant Q, \tag{1}$$

где Q постоянная, то отображение $f(z)$ называется Q-квазиконформным.

Лемма 4. 1. *При Q-квазиконформном отображении $f(z)$ „растяжение“*

$$\Lambda_f(z) = \overline{\lim_{h \to 0}} \left| \frac{f(z+h) - f(z)}{h} \right| \tag{2}$$

почти всюду конечно:

$$\Lambda_f(z) < \infty. \tag{3}$$

Доказательство. Доказательство леммы проводится аналогично доказательству одной леммы Д. Е. Меньшова ([6], лемма 2) и опирается на теорему Витали (см. приложение, I. 1).

Допустим, что

$$\Lambda_f(z) = \infty \tag{4}$$

на множестве $E \subset D$ положительной внешней меры, $m^* E > 0$. Тогда можно указать такую область D_1, $\overline{D_1} \subset D$, где множество $E_1 = E \cdot D_1$ также положительной внешней меры,

$$m^* E_1 > 0. \tag{5}$$

Ясно, что область $f(D_1)$ ограничена и, следовательно, имеет конечную площадь. Идея приводимого ниже доказательства состоит в том, чтобы получить для этой площади сколь угодно большое значение, опираясь на подходящее покрытие E_1 характеристическими эллипсами и теорему Витали. Таким образом мы придем к противоречию, доказывающему лемму 4. 1.

Пусть N сколь угодно большое число. Из (2) следует, что для любой точки $z_0 \in E_1$ найдется последовательность точек $\zeta_n = \zeta_n(z_0) \in D_1$ таких, что

$$\left| \frac{f(\zeta_n) - f(z_0)}{\zeta_n - z_0} \right| > N \tag{6}$$

и $r_n = |\zeta_n - z_0| \searrow 0$*. Через каждую точку ζ_n проведем эллипс $E_n(p_1\,\Theta;\, z_0)$ с полуосями a_n, b_n.

Пусть E_n' эллипс с полуосями a_n', b_n', вписанный в кривую $\gamma_n = f(E_n)$ и E_n'' эллипс с полуосями a_n'', b_n'', описанный вокруг γ_n. При этом

$$\frac{a_n}{b_n} = p \leqslant Q, \quad \frac{a_n'}{b_n'} = \frac{a_n''}{b_n''} = p_1 \leqslant Q \tag{7}$$

и $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{b_n'}{b_n''} = 1$. Отбрасывая возможно конечное число эллипсов E_n, можно считать, что

$$\frac{a_n'}{a_n''} > \frac{1}{2}. \tag{8}$$

Замкнутые области $\overline{E}_n$, ограниченные E_n, образуют покрытие Витали множества E_1, ибо

$$\frac{mE_n}{\pi a_n^2} = \frac{\pi a_n b_n}{\pi a_n^2} = \frac{b_n}{a_n} \geqslant \frac{1}{Q}.$$

Поэтому из них можно выбрать конечное число таких областей $g_i = \overline{E}_{n_i}(z_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, s)$, которые попарно взаимно простые и

$$\sum_{i=1}^{s} mg_i = \pi \sum a_{n_i} b_{n_i} > \frac{1}{2} m^* E_1. \tag{9}$$

В силу однолистности отображения $w = f(z)$ области $f(g_i)$

---

* Знак $\searrow$ означает монотонное убывание.

также взаимно простые поэтому $mf D > \sum^{r} mf g_r$ Но я си у (6 $a > N$ и в силу (7 и (8)

$$mf g > \frac{N^2}{Q} mg \qquad (0)$$

ибо

$$mf(g \geqslant \pi a \; b \geqslant \; Q > \; Q > \frac{N^2}{4Q} \qquad \geqslant \frac{N^2}{Q} \pi a \; b$$

Следовате ьно

$$nf D \quad \frac{N}{Q} \sum mg \quad \frac{N^2}{4Q} m^* E$$

ч о при любом Λ очеви но невозможно Полученное ро тивор ие док зы ае е му 4

Заме им ч лемма 4 праведлива д я обратно о от обр жения z w В мом де е е и M множе во точек w т ких ч о

$$\overline{\lim} \left| \frac{w \quad h \quad \varphi \; w}{h} \right| \quad \infty \qquad (11)$$

то фик ируя произво о бол шое чи о N и ра матр вая кривые γ w одоб ые вышера мотренным но проходящие т пер чер з точки акие ч о

$$\frac{w}{- w_0} \Big| > \Lambda \quad \rho \qquad w \qquad 0$$

придем к про иворечию д пуч ением ч о $n^* M$ 0 е ли во по ьзова я еоремой В и для м оже ва M с покры ти м замкнутыми об а ями γ о ра и ен ыми кривыми (и ателю рекомендуе подробно пров т указан ое дока за ел во).

Соотношение (11) эквивалентно д я точек $z = \varphi$ w ле ду ощему

$$\lambda \; z) \quad \lim_{h} \left| \frac{f \quad h \quad f}{h} \right| \quad 0 \qquad (2)$$

Что же ожно с зать о мер $m\varphi$ M ? На это вопро мы пока не имеем ответа заметим ишь что если в рна ипотеза ч о при Q кв зиконформных отображениях множ тво ложительн й меры переходит в множе тво положите ьной меры то m M 0

Примеча ие Из док зательства ле мы 4 1 и о обен о из указанного ра мотрения ее для обра ной функции φ w)

видно, что покрытие множества E именно эллипсами не существенно, важно лишь, чтобы получалось покрытие Витали и чтобы соответствующие кривые γ были заключены между окружностями с равномерно ограниченными отношениями радиусов. Так как теорема Витали справедлива и для n-мерных пространств, то ограничение двумерным случаем также не существенно.

Это позволяет обобщить лемму 4.1 на весьма широкий класс непрерывных отображений, что и было сделано (см. [7]).

Докажем теперь следующую лемму.

Лемма 4.2. При Q-квазиконформном отображении $w=f(z)$ растяжение $\Lambda_f(z)$ суммируемо со своим квадратом внутри D, то есть для любой области D_1, $\overline{D}_1\subset D$,

$$\iint_{D_1} \Lambda_f^2(z)\,dx\,dy<\infty. \tag{13}$$

Доказательство. В силу леммы 4.1 для множества $S\subset D_1$, где $\Lambda_f(z)<\infty$, мера $mS=mD_1$, поэтому (13) эквивалентно тому, что

$$\iint_S \Lambda_f^2(z)\,dx\,dy<\infty. \tag{14}$$

Пусть S_n — часть S, где

$$n-1<\Lambda_f(z)\leqslant n. \tag{15}$$

Тогда $S=\sum\limits_{n=1}^{\infty} S_n$ и, так как

$$\iint_{S_n} \Lambda_f^2(z)\,dx\,dy\leqslant n^2\cdot mS_n,$$

то (14) будет доказано, если мы покажем, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2\cdot mS_n<\infty. \tag{16}$$

Зафиксируем произвольно большое число N и для $k=1, 2, \ldots, N$ рассмотрим такие попарно взаимно простые совершенные множества $P_k\subset S_k$, что $mP_k>\frac{1}{2}mS_k$.

Эти множества отстоят на положительном расстоянии друг от друга и от границы области D_1, поэтому их можно заключить в попарно взаимно простые области $G_k \subset D_1$. Тогда для произвольной точки $z_0 \in P_k$ найдется последовательность точек $\zeta_n = \zeta_n(z_0) \in G_k$ таких, что

$$\left| \frac{f(\zeta_n) - f(z_0)}{\zeta_n - z_0} \right| > k - 1, \ |\zeta_n - z_0| \searrow 0. \tag{17}$$

Проводя эллипсы $E_n(p, \Theta; z_0)$, проходящие через ζ_n, заключаем, как при доказательстве леммы 4. 1, что при фиксированном k можно выбрать конечное число эллипсов $E_{n_i}(z_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, s_k;\ z_i \in P_k)$ так, что ограниченные ими замкнутые области $g_{ik} \subset G_k$ попарно взаимно простые и их образы, также взаимно простые в силу однолистности отображения $f(z)$, имеют площадь

$$\sum_{i=1}^{s_k} mf(g_{ik}) > \frac{(k-1)^2}{4Q^2} mP_k > \frac{(k-1)^2}{8Q^2} mS_k$$

(из сравнения (6) и (17) следует, что в рассматриваемом случае роль N в (6) для (17) играет $k-1$). Поступая так со всеми множествами P_k и, замечая, что все области g_{ik} $(i = 1, 2, \ldots, s_k;$ $k = 1, 2, \ldots, N)$ взаимно простые, получаем соотношение

$$mf(D_1) > \sum_{k=1}^{N} \sum_{i=1}^{s_k} mf(g_{ik}) > \frac{1}{8Q^2} \sum_{k=1}^{N} (k-1)^2 \cdot mS_k,$$

откуда следует сходимость ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} (k-1)^2 \cdot mS_k,$$

а с ним и ряда (16), что доказывает соотношение (14).

Заметим, что к лемме 4. 2 можно сделать такое же замечание, как и выше, к лемме 4. 1, хотя там можно еще отказаться от требования Q-квазиконформности.

4. 2. *Теорема В. В. Степанова*. Для того чтобы действительная функция $u(x, y)$, определенная и непрерывная в области D, обладала почти всюду на измеримом множестве $E \subset D$ полным дифференциалом, необходимо и достаточно, чтобы почти всюду на E*

* У самого В. В. Степанова [8, 9] функция u (x, y) предполагается только определенной и измеримой на множестве E; предположение, что она определена и непрерывна в области $D \supset E$ слегка упрощает доказательство и нас вполне устраивает.

$$\Lambda_u(z) = \overline{\lim_{h,k\to 0}} \left| \frac{u(x+h, y+k) - u(x,y)}{\sqrt{h^2+k^2}} \right| < \infty. \tag{1}$$

Доказательство. Необходимость условия доказывается просто. Пусть $z_0 = x_0 + iy_0 \in E$ — точка дифференцируемости $u(x, y)$ и $\Delta z = z - z_0 = h + ik$, $|\Delta z| = \rho = \sqrt{h^2+k^2}$.

Тогда

$$\left| \frac{u(z_0+\Delta z) - u(z_0)}{\Delta z} \right| = \left| \frac{hu_x(z_0) + ku_y(z_0)}{\sqrt{h^2+k^2}} + \eta(\rho) \right|,$$

где $\eta(\rho) \to 0$ при $\rho \to 0$. Отсюда

$$\Lambda_u(z_0) = \overline{\lim_{h,k\to 0}} \left| \frac{hu_x(z_0) + ku_y(z_0)}{\sqrt{h^2+k^2}} \right| = \sqrt{u_x^2(z_0) + u_y^2(z_0)} < \infty,$$

что соответствует известному свойству grad u

$$\Lambda_u(z) = |\operatorname{grad} u| = \sqrt{u_x^2 + u_y^2} \tag{2}$$

в точках дифференцируемости.

Достаточность условия доказывается в два приема: сначала, опираясь на теоремы Лузина-Данжуа, Фуббини и Тонелли (см. приложение, 1.2, 1.3) доказывается, что частные производные u_x, u_y существуют почти всюду на E, затем, опираясь на теорему Д. Ф. Егорова, доказывается, что почти всюду на E функция $u(x, y)$ обладает полным дифференциалом.

Пусть E — произвольное измеримое множество точек D и E_1 — множество точек E, где $\Lambda_u(z) = \infty$. По условию теоремы $m E_1 = 0$; отсюда по теореме Фуббини следует, что почти для всех y множества (E_1, y),— так мы будем обозначать пересечение E_1 с прямой $y = \text{const}$ — имеют линейную меру нуль. Тогда, обозначая линейную меру через mes, почти для всех y имеем соотношение $\text{mes}\,(E - E_1, y) = \text{mes}\,(E, y)$ и, так как $\Lambda_u(z) < \infty$ на $(E - E_1, y)$, то, по теореме Лузина-Данжуа, почти всюду на $(E - E_1, y)$ существует производная u_x. Таким образом доказано, что почти для всех y почти всюду на (E, y) существует u_x. По теореме Тонелли отсюда следует, что в случае измеримости, множество точек $e \subset E$, где u_x не существует, имеет плоскую меру $me = 0$. Но e измеримо вместе с множеством $E - e$, где u_x существует, следовательно, где обращается в нуль разность $\overline{\lim_{h\to 0}} \varphi_h - \underline{\lim_{h\to 0}} \varphi_h$, в которой

$$\varphi_h = \frac{u(x+h, y) - u(x, y)}{h}.$$

Но $\underline{\lim}\, \varphi_h$ и $\overline{\lim}\, \varphi_h$ измеримые функции (см. С. Сакс „Теория интеграла", 1949, гл. IV, § 4); отсюда следует измеримость множества $E-e$, а с ним и множества e, значит, в силу вышесказанного, $me=0$, то есть нами доказано, что u_x существует почти всюду на E.

Аналогично доказывается, что u_y существует почти всюду на E, откуда ясно, что u_x u_y существует одновременно на множестве $M \subset E$ полной меры, $mM = mE$.

Прежде чем переходить к доказательству того, что $u(x, y)$ почти всюду на M, значит и на E, обладает полным дифференциалом, заметим, что из одного только наличия u_x, u_y это еще не следует. В своей работе В. В. Степанов [9] дает пример функции $f(x,y)$, обладающей почти всюду частными производными и нигде не имеющей полного дифференциала. Однако у нас имеется еще дополнительное условие (1) и оно решает дело. Нам удобно будет это условие записать в виде

$$\Lambda_u(z) = \lim_{\rho \to 0} \Lambda_{u,\rho}(z) < \infty, \quad \Lambda_{u,\rho}(z) = \sup_{|\Delta z| < \rho} \left| \frac{u(z+\Delta z) - u(z)}{\Delta z} \right|. \tag{3}$$

Зададимся произвольно малым числом $\alpha > 0$ и подберем настолько большое число N_α, чтобы для него нашлось множество $S \subset M$, $mS > mM - \frac{\alpha}{2} > mE - \frac{\alpha}{2}$, где $\Lambda_u(z) < N_\alpha$, что, очевидно, возможно. Затем подберем такое совершенное множество $P \subset S$ с мерой $mP > mS - \frac{\alpha}{2} > mE - \alpha$, чтобы для $z \in P$ функции

$$\Lambda_{u,\rho}(z), \quad \frac{u(x+h, y) - u(x, y)}{h}, \quad \frac{u(x, y+k) - u(x, y)}{k}$$

сходились равномерно соответственно к $\Lambda_u(z)$, u_x и u_y, что также возможно на основании известной теоремы Д. Ф. Егорова.* Поэтому u_x, u_y непрерывны на P и для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta = \delta(\varepsilon)$, что для $z \in P$, $z + \Delta z \in D$, $|\Delta z| < \delta$, $|h| < \delta$, $|k| < \delta$ и $z', z'' \in P$, $|z' - z''| < \delta$ имеют место соотношения

$$\left| \frac{u(z+\Delta z) - u(z)}{\Delta z} \right| < \Lambda_u(z) + \varepsilon < 2N_\alpha, \tag{4}$$

$$\left| \frac{u(x+h, y) - u(x, y)}{h} - u_x(x, y) \right| < \varepsilon,$$

$$\left| \frac{u(x, y+k) - u(x, y)}{k} - u_y(x, y) \right| < \varepsilon, \tag{5}$$

$$|u_x(z'') - u_x(z')| < \varepsilon, \; |u_y(z'') - u_y(z')| < \varepsilon. \tag{6}$$

---

* Обычно это теорема формулируется для *последовательностей измеримых* функций, однако доказательство ее сохраняется и для *семейства непрерывных* функций с параметром (как показал И. Н. Песин, а еще ранее Г. П. Толстов заменить здесь непрерывность измеримостью в общем случае нельзя).

Мы сейчас покажем, что $u(x, y)$ обладает полным дифференциалом, по крайней мере, во всех точках плотности множества P, следовательно, почти всюду на P. Для этого зафиксируем произвольно большое число $N > 2$ и рассмотрим произвольную точку плотности z_0 множества P. Тогда найдется такое число $r_N = r_N(z_0)$, когда для любого круга $Q_{r, z_0} : |z - z_0| < r \leqslant r_N$ выполняется соотношение*

$$\frac{m(Q_{r, z_0} \cdot P)}{\pi r^2} > 1 - \frac{1}{N^2}.$$

Пусть теперь $z_1 = x_1 + iy_1$ произвольная точка D, для которой величина $d = |z_1 - z_0|$ удовлетворяет условию

$$d < \frac{N-1}{N} \min \left\{ \delta(\varepsilon) ; r_N(z_0) \right\}.$$

Так как круг $|z - z_1| < \frac{d}{N-1}$ лежит внутри круга $|z - z_0| < d + \frac{d}{N-1} = \frac{Nd}{N-1} < \min\{\delta, r_N\}$ и отношение их площадей равно $\frac{1}{N^2}$, то из предыдущего заключаем, что первый круг должен содержать часть P положительной меры. Пусть $z_2 = x_2 + iy_2$ такая точка P, что $|z_2 - z_1| < \frac{d}{N-1}$ и $x_2 \neq x_0$, $y_2 \neq y_0$. Тогда для оценки разности $u(x_1, y_1) - u(x_0, y_0)$ представим ее в виде $[u(x_1, y_1) - u(x_2, y_2)] + [u(x_2, y_2) - u(x_0, y_2)] + [u(x_0, y_2) - u(x_0, y_0)]$ и будем оценивать каждое слагаемое в отдельности.

Так как $|z_1 - z_2| < \frac{d}{N-1} < \delta$ и $z_2 \in P$, то, в силу (4)

$$|u(z_1) - u(z_2)| = |z_1 - z_2| \left| \frac{u(z_1) - u(z_2)}{z_1 - z_2} \right| < \frac{d}{N-1} 2 N_\alpha.$$

Далее, так как $|z_2 - z_0|$ и $|z_2 - z_1| < \delta$, $|x_2 - x_1| < \frac{d}{N-1}$ и $|x_2 - x_0| \frac{Nd}{N-1} < 2d$, то в силу (5) и (6),

$$u(x_2, y_2) - u(x_0, y_2) = (x_2 - x_0) \frac{u(x_2, y_2) - u(x_0, y_2)}{x_2 - x_0} =$$
$$= (x_2 - x_0)[u_x(x_2, y_2) + \Theta_1 \varepsilon] = (x_2 - x_0)[u_x(x_0, y_0) + 2\Theta_2 \varepsilon] =$$
$$= (x_1 - x_0) u_x(x_0, y_0) + \frac{d \cdot \Theta_3}{N-1} u_x(x_0, y_0) + 4\Theta_4 \cdot d \cdot \varepsilon,$$

---

* Как известно, точка $z_0 \in E$ называется точкой плотности E, если для пересечения E_r множества E с кругом $|z - z_0| < r$ имеет место соотношение

$$\lim_{r \to 0} \frac{m E_r}{\pi r^2} = 1;$$

для всякого измеримого множества точки плотности образуют множество полной меры.

где $|\Theta_1|, \ldots, |\Theta_4| < 1$. Аналогично из (5) и (6) следует, что

$$u(x_0, y_2) - u(x_0, y_0) = (y_1 - y_0)\, u_y(x_0, y_0) + \frac{d\Theta_5}{N-1} u_y(x_0, y_0) + $$
$+ 2\Theta_6 \cdot d \cdot \varepsilon$, где $|\Theta_5|, |\Theta_6| < 1$. В целом имеем

$$u(x_1, y_1) - u(x_0, y_0) = (x_1 - x_0)\, u_x(x_0, y_0) + (y_1 - y_0)\, u_y(x_0, y_0) + $$
$$+ d\left(\Theta' K_\varepsilon + \Theta'' \frac{L}{N-1}\right), \tag{7}$$

где $|\Theta'|, |\Theta''| < 1$, $0 < K < 6$ и L зависит только от N_α и значений $u_x(x_0, y_0)$, $u_y(x_0, y_0)$. Так как N сколь угодно велико и $d = |z_1 - z_0|$, то из (7) следует дифференцируемость $u(x, y)$ в точке z_0.

Таким образом доказано, что $u(x, y)$ почти всюду на P обладает полным дифференциалом и, так как $mP > mE - \alpha$, а α произвольно малое число, то доказано, что $u(x, y)$ обладает полным дифференциалом почти всюду на E.

4. 3. Дифференцируемость квазиконформного отображения. Из теоремы В. В. Степанова получаем такое следствие (см. [10]):

Если функция $f(z) = u + iv$ непрерывна в области D и почти всюду в D имеет конечное растяжение

$$\Lambda_f(z) = \lim_{h \to 0} \left| \frac{f(z+h) - f(z)}{h} \right|, \tag{1}$$

то $f(z)$ дифференцируема почти всюду в D.

В самом деле, так как очевидно

$$\Lambda_u(z) = \overline{\lim_{h \to 0}} \left| \frac{u(z+h) - u(z)}{h} \right| \leqslant \Lambda_f(z),$$
$$\Lambda_v(z) = \overline{\lim_{h \to 0}} \left| \frac{v(z+h) - v(z)}{h} \right| \leqslant \Lambda_f(z), \tag{2}$$

то сделанное утверждение справедливо для каждой из функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$ в отдельности, а значит и для них обоих одновременно.

Опираясь на это следствие и на леммы 4. 1, 4. 2 о растяжении, получаем следующую теорему:

Теорема 4. 1. Квазиконформное отображение $f(z) = u + iv$ области D дифференцируемо почти всюду в D и частные производные u_x, u_y, v_x, v_y суммируемы со своими квадратами внутри D, то есть во всякой области D_1, $\overline{D_1} \subset D$.

Доказательство. Прежде всего ясно, что для всякой области D_1, $D_1 \subset D$ отображение $f(z)$ является Q-квазиконформным, откуда следует, что доказательство можно вести в предположении Q-квазиконформности. В этом случае первое утверждение теоремы непосредственно следует из леммы 4. 1 и следствия из теоремы В. В. Степанова, второе же утверждение следует из леммы 4. 2, если заметить, что в точках дифференцируемости $f(z)$ имеем

$$\Lambda_u^2(z)=u_x^2+u_y^2\leqslant\Lambda_f^2(z),\quad \Lambda_v^2(z)=v_x^2+v_y^2\leqslant\Lambda_f^2(z). \tag{3}$$

Примечание 1. Теорема 4. 1 допускает обобщение на значительно более общий класс непрерывных отображений (см. [7] и примечания выше к леммам о растяжении).

Примечание 2. Имеет место следующая теорема*:

Если $f(z)=u+iv$ отображает гомеоморфно измеримое множество E на множество E_1 и $\Lambda_f(z)<\infty$ почти всюду на E, то якобиан $J=u_xv_y-u_yv_x$ суммируем на E. Возникает вопрос, что можно сказать о суммируемости $\Lambda_f^2(z)$ в этом общем случае? Ответ пока нам не известен.

§ 5. СОХРАНЕНИЕ ФОРМУЛЫ ГРИНА ДЛЯ КВАЗИКОНФОРМНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ И ТЕОРЕМА Д. Е. МЕНЬШОВА О ГОМЕОМОРФНЫХ ОТОБРАЖЕНИЯХ, ПЕРЕВОДЯЩИХ БЕСКОНЕЧНО МАЛЫЕ КРУГИ В БЕСКОНЕЧНО МАЛЫЕ КРУГИ

5. 1. О плоских всюду разрывных множествах точек. Введем для начала несколько определений.

Определение 5. 1. *Плоское совершенное множество P называется всюду разрывным, если любую его точку в сколь угодно малой ее окрестности можно окружить замкнутой жордановой кривой, не проходящей через точки P.*

Любое совершенное всюду разрывное плоское множество всегда можно заключить в конечную систему замкнутых спрямляемых жордановых кривых $\{\gamma_k\}$ $(k=1,2,\ldots,n)$, которые лежат попарно вне друг друга, не имеют общих точек с P и имеют сколь угодно малый диаметр. Рассматривая всевозможные такие системы $\{\gamma_k\}$ и обозначая через $l(\gamma_k)$ длину γ_k, приходим к следующему определению:

Определение 5. 2. *Пусть P — совершенное всюду разрывное множество и $\{\gamma_k\}$ какая-либо система попарно взаимно простых жордановых кривых, лежащих вне друг друга и заключающих внутри P. Тогда число*

---

* См. [11]; вместо условия $\Lambda_f(z)<\infty$ там имеется более сильное требование существования почти всюду на E полных дифференциалов du, dv. Как следует из теоремы В. В. Степанова, которая была доказана позднее, оба условия эквивалентны.

$$l(P) = \inf \sum_{(k)} l(\gamma_k),$$

где справа рассматриваются всевозможные указанные системы $\{\gamma_k\}$, *максимальный диаметр которых стремится к нулю, называется длиной множества. Множество* P *называется точечным или нулевой длины, если* $l(P)=0$, *полулинейным, если* $0 < l(P) < \infty$ *и полуповерхностным, если* $l(P)=\infty$.

Заметим, что если $l(P) < \infty$, то плоская мера $mP=0$; обратное, однако, не обязательно. Укажем также на следующую теорему Пенлеве [12]:

Если функция $f(z)$ *непрерывна в области* D *и аналитична там вне совершенного всюду разрывного множества* P *конечной длины, то* $f(z)$ *аналитична всюду в* D.

Если $l(P)=\infty$, то теорема вообще несправедлива, если даже известно, что $mP=0$ (см. [12]).

5.2. N-свойство непрерывных однолистных функций (к этому пункту см. приложение 1.4).Введем, следуяД. Е. Меньшову [10], такое определение:

Определение 5.3. *Функция* $f(z)$, *непрерывная и однолистная в области* D, *обладает* N*-свойством на прямолинейном сегменте* Δ, *лежащем внутри* D, *если она всякое совершенное множество* $P \subset \Delta$ *линейной меры нуль*, $\operatorname{mes} P=0$, *преобразует в множество нулевой длины.*

Если $f(z)=u+iv$ обладает N-свойством на сегменте $\Delta \subset D$, то функции $u(z)$ и $v(z)$ на Δ обладают N-свойством в смысле Н. Н. Лузина, ибо всюду разрывное множество длины нуль проектируется иа любую прямую в множество меры нуль; обратное, однако, вообще не верно, так как из того, что $u(z)$ и $v(z)$ на Δ обладают N-свойством еще не следует, что $f(z)$ обладает на Δ N-свойством (читателю предлагается построить противоречащий пример).

Теорема 5.1. *Если* $f(z)$ *не обладает* N*-свойством на сегменте* $\Delta \subset D$, *то существует такое совершенное множество* $P \subset \Delta$, $\operatorname{mes} P=0$, *что всякая его порция (так называется замыкание непустого пересечения* P *с интервалом* $(\alpha, \beta) \subset \Delta$) *преобразуется в множество ненулевой длины.*

Доказательство. По условию существует такое совершенное множество $P \subset \Delta$, $\operatorname{mes} P=0$, что $l[f(P)]>0$. Обозначим через E множество точек P, которые можно заключить в интервалы, определяющие порции P, переходящие в множества нулевой длины и покажем, что множество $P_1 = P - E$ является искомым. Вначале покажем, что P_1 является совершенным. Прежде всего P_1 не пусто, ибо иначе $P=E$ и, покрывая E сегментами, выделяющими из P порции, преобразуемые в множества нулевой длины и выделяя из этого покрытия конечное покрытие, мы смогли бы P представить в виде суммы конечного числа совершенных подмножеств, переходящих в множества нулевой длины, откуда следовало бы, что $l[f(P)]=0$. Очевидно также, что множество P_1 замкнуто и оно не может иметь изолированных точек. В самом деле, пусть z_0 — единственная точка P_1 внутри сегмента $[\alpha, \beta] \subset \Delta$. Окружим точку $w_0=f(z_0)$ окружностью γ_0 произвольно малого радиуса ρ и разобьем все точки $P \cdot [\alpha, \beta]$ на точки M_1, образ которых лежит строго внутри γ_0 и точки F_1, образ которых лежит вне или на γ_0. Множество F_1 замкнуто и $l[f(F_1)]=0$ (доказывается как выше). Поэтому $f(F_1)$ можно заключить в систему попарно взаимно простых замкнутых жордановых кривых $\{\gamma_k\}$ со сколь угодно малой суммой длин. Те из $\{\gamma_k\}$, которые, возможно, пересекаются с γ_0, объединим с γ_0, отбрасывая от γ_0 и γ_k дуги, являющиеся сечениями областей, ограниченных γ_k соответственно γ_0. Таким образом $f(P[\alpha, \beta])$ также оказывается возможным заключить в систему кривых со сколь угодно малой суммой длин, следовательно в $l(P \cdot [\alpha, \beta])=0$, что противоречит тому, что $z_0 \in P_1$.

Мы показали, что P_1 есть совершенное множество. Покажем теперь, что всякая его порция преобразуется во множество ненулевой длины.

Допустим, что существует такой интервал $(\alpha, \beta) \subset \Delta$, содержащий точки из P_1, что $l\{f(P_1 \cdot [\alpha, \beta])\}=0$. Так как $P=P_1+E$, то $P \cdot [\alpha, \beta]=P_1 \cdot [\alpha, \beta]+E \cdot [\alpha, \beta]$. Заключим образ первого множества внутрь попарно взаимно простых кривых $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_s$ со сколь угодно малой суммой длин и разобьем второе множество на две такие части M' и F', что $f(M')$ лежит целиком внутри указанных кривых, а $f(F')$ — вне или на этих кривых. Тогда на основании вышеизложенного замечаем, что F' — замкнутое множество нулевой длины и поэтому $f(F')$ можно заключить в систему взаимно простых кривых $\gamma_1', \gamma_2', \ldots, \gamma_q'$ со сколь угодно малой суммой длин. Объединяя их с прежними кривыми (как выше с γ_0), получим попарно взаимно простые кривые $\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2, \ldots, \tilde{\gamma}_n$ со сколь угодно малой суммой длин, заключающие все множество $f(P \cdot [\alpha, \beta])$. Но тогда это множество нулевой длины, а значит на (α, β) не могут лежать точки из P_1, что ведет к противоречию.

5. 3. N-свойство квазиконформных отображений. Возвращаясь к квазиконформным отображениям, докажем следующую теорему:

Теорема 5. 2. *Квазиконформное отображение $w=f(z)$ области D обладает N-свойством почти на всех сечениях области D прямыми, параллельными осям координат.*

Доказательство. (см. [6] и [13]). Теорему, очевидно, достаточно рассмотреть для Q-квазиконформного отображения квадрата D со сторонами, параллельными осям координат и ограниченной функции $f(z)$.

Для любой точки $z_0 \in D$ можно указать такое число $h(z_0)>0$, чтобы образ $\gamma=f(E)$ эллипса $E(p,\Theta;z_0)$ с полуосями a и b, $b\leqslant h(z_0)$ был заключен между эллипсами $E'(p_1,\Theta_1;w_0)$ и $E''(p_1,\Theta_1;w_0)$, $w_0=f(z_0)$, с полуосями a' и b', соответственно a'' и b'' такими, что $\frac{1}{2}b''<b'<b''$. Обозначая через E_n множество точек D, для которых $h(z)\leqslant\frac{1}{n}$, будем иметь $D=\sum\limits_{n=1}^{\infty}E_n$.

Заметив это, допустим, что существует такое множество e значений y с внешней мерой $\mathrm{mes}^*\, e>0$, что на каждом сечении $[D,y]$, $y\in e$ можно указать совершенное множество $\Pi(y)$ меры нуль, любая порция которого преобразуется в множество ненулевой длины. Полагая $\Pi_n(y)=\Pi(y)\cdot E_n$, будем иметь $\Pi(y)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\Pi_n(y)$. Так как совершенное множество, подобно сегменту, нельзя разбить на конечное или счетное число нигде не плотных на нем множеств (см. приложение 1.6) и так как, очевидно, $E_n\subseteq E_{n+1}$, следовательно, и $\Pi_n(y)\subseteq\Pi_{n+1}(y)$, то начиная с некоторого номера $n_0(y)$ множества $\Pi_n(y)$ не будут нигде не плотными на $\Pi(y)$, а будут всюду плотны, по крайней мере, на некоторой порции $\Pi(y)$. Заменим $\Pi(y)$ указанной его порцией, которую обозначим через $\pi(y)$ (соответственно $\pi_n(y)=\pi(y)\cdot E_n$).

Не трудно далее убедиться, что существует такое $\lambda>0$ и натуральное число n_0, что из множества e значений y можно выделить такое подмножество $e_1\subseteq e$, $\mathrm{mes}^*\, e_1>0$, где для каждого $y\in e_1$ число $n_0(y)=n_0$ и длина $l\{f[\pi(y)]\}>\lambda$.

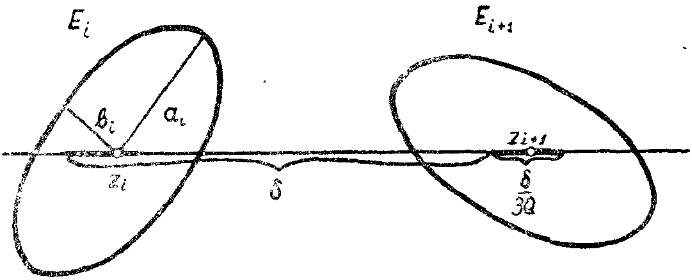
Идея дальнейшей части доказательства состоит в том, чтобы, покрывая достаточно большую часть множества $\sum\limits_{y\in e_1}\pi(y)$ эллипса $E(p,\Theta;z)$, расположенными вне друг друга и оценивая площадь их образов, получить для нее сколь угодно большое значение, что ведет к противоречию.

Зафиксируем произвольно большое число N и каждое множество $\pi(y)$, $y\in e_1$, заключим в конечное число $\nu(y)$ сегментов с одинаковой сколь угодно малой длиной $\delta(y)$ так, что

$$\nu(y)\delta(y)<\frac{1}{n_0 N}.$$

Каждый сегмент $\delta(y)$ разобьем на $3Q$ равные части и $\pi(y)$ разобьем на $3Q$ частей, составленные из точек, попадающие соответственно в первые, вторые и т. д. части разбиения указанных сегментов. Тогда по крайней мере для одной из $3Q$ указанных частей $\pi(y)$, которую мы обозначим через $\pi^*(y)$, длина $l\{f[\pi^*(y)]\} > \frac{\lambda}{3Q}$. Внутри каждого из сегментов, длиной $\frac{\delta(y)}{3Q}$, которые были использованы при построении $\pi^*(y)$, возьмем произвольную точку $z_i \in \pi_n(y)$ ($i = 1, 2, \ldots, \nu(y)$; $n \geqslant n_0$; напомним, что $\pi_n(y)$ всюду плотно на $\pi(y)$) и построим эллипс $E_i(p, \Theta; z_i)$ с малой полуосью $b_i = \frac{\delta(y)}{3Q}$.

Так как $p \leqslant Q$, то из предыдущего ясно, что эллипсы E_i, а с ними и их образы $\gamma_i = f(E_i)$, расположены вне друг друга и заключают внутри множество $f[\pi^*(y)]$ (см. черт. 5.1). Заклю-



$$b_i = \frac{\delta}{3Q}, \quad a_i \leqslant \frac{\delta}{3} \, (i = 1, 2, \ldots, \nu_k)$$

Чертеж 5. 1

чая γ_i между эллипсами $E_i'(p_1, \Theta_1; w_i)$, $E_i''(p_1, \Theta_1; w_i)$, $w_i = f(z_i)$, найдем, что площадь $S(y)$, ограниченная кривыми γ_i, удовлетворяет неравенству

$$S(y) \geqslant \sum_{i=1}^{\nu} \pi b_i'^2 \geqslant \frac{\pi}{4Q^2} \sum_{i=1}^{\nu} a_i''^2,$$

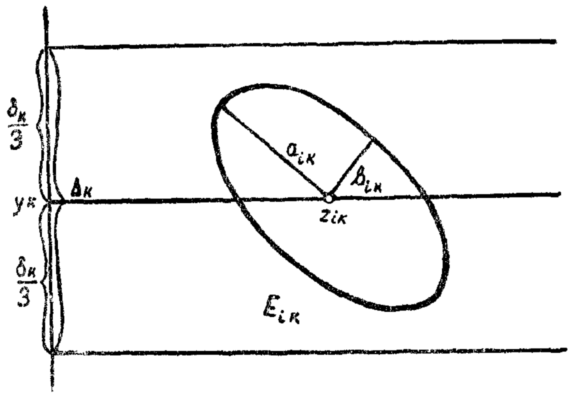
откуда, по известному неравенству $\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \beta_k\right)^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2 \sum_{k=1}^{n} \beta_k^2$

найдем, что

$$S(y) \geqslant \frac{\pi}{4Q^2\nu} \left(\sum_{i=1}^{\nu} a_i''\right)^2.$$

Пусть d_i диаметр области, ограниченной γ_i. Заключая каждую кривую γ_i в круг диаметра d_i и объединяя в одну область те из кругов, которые при этом окажутся сцепленными, получим новое покрытие множества $f[\pi^*(y)]$ областями, сумма длин границ которых не больше, чем $\sum_{i=1}^{\nu} \pi d_i$. Диаметр этих областей неограниченно убывает вместе с δ (в самом деле, если γ_i^* несколько расширенные γ_i, то сцепленные области, соответствующие достаточно малым $\delta' < \delta$, не выходят за пределы γ_i^*). Поэтому, если δ достаточно мало, то из $l\{f[\pi^*(y)]\} > \frac{\lambda}{3Q}$ следует, что $\sum_{i=1}^{\nu} d_i > \frac{\lambda}{3\pi Q}$ * и, так как $a_i'' \geqslant \frac{d_i}{2}$, то $\sum_{i=1}^{\nu} a_i'' \geqslant \frac{\lambda}{6\pi Q}$. Замечая, что $\frac{1}{\nu} > n_0 N\delta$, получаем для $S(y)$ такую оценку:

$$S(y) > AN\delta, \text{ где } A = \frac{\lambda^2 n_0}{144\pi Q^4}.$$



$$b_{ik} = \frac{\delta_k}{3Q}, \quad a_{ik} \leqslant \frac{\delta_k}{3} \ (i = 1, 2, \ldots, \nu_{ki}; k = 1, 2, \ldots, s)$$

Чертеж 5. 2

Поставим теперь в соответствие каждой точке $y \in e_1$ систему сегментов $\Delta(y)$ на оси y-ов с центрами в точке y и длиной $\frac{2}{3}\delta(y)$. Так как $\delta(y)$ произвольно мало (при больших $\nu(y)$), то указанные сегменты образуют покрытие Витали для множества e_1. Поэтому найдется такое конечное число сегментов $\Delta_k (k = 1, 2, \ldots, s)$ с центрами в точках y_k и длиной $\frac{2}{3}\delta_k$, которые лежат вне друг друга и удовлетворяют неравенству

* Чтобы диаметры d_i были меньше некоторого d_0, нужно уменьшить δ; это изменяет $\pi^*(y)$, а с ним, возможно, и требуемую малость d_0. Можно, однако, показать, что по крайней мере для одного из $3Q$ подмножеств, на которые разбивается $\pi(y)$, в частности для $\pi^*(y)$, можно d_0 выбрать независимо от способа разбиения $\pi(y)$.

$$\sum_{k=1}^{s} \frac{2}{3} \delta_k > \frac{1}{2} \operatorname{mes}^* e_1 .$$

Рассматривая теперь покрытие множеств $\pi^*(\nu_k)$ указанными выше эллипсами E_{ik} $(i=1, 2, \ldots, \nu_k;\ k=1, 2, \ldots, s)$ с малыми полуосями $b_{ik}=\frac{\delta_k}{3Q}$ замечаем, что все они лежат вне друг друга (черт. 5. 2) и покрывают площадь, равную

$$\sum_{k=1}^{s} S(y_k) > AN \sum_{k=1}^{s} \delta_k > \frac{3}{4} AN \cdot \operatorname{mes}^* e_1 ,$$

что при любом N, очевидно, невозможно.

5. 4. Формула Грина для квазиконформных отображений и теорема Д. Е. Меньшова о гомеоморфных отображениях, переводящих бесконечно малые круги в бесконечно малые круги. Рассмотрим сначала следующую теорему Д. Е. Меньшова ([10], стр. 32):

Теорема 5. 3. *Пусть функция $f(z)=u+iv$ непрерывна и однолистна в прямоугольнике $R(x_0 \leqslant x \leqslant x_1;\ y_0 \leqslant y \leqslant y_1)$ и имеет там почти всюду суммируемые частные производные u_x, u_y, v_x, v_y. Пусть далее почти для всех сечений R прямыми, параллельными осям координат, $f(z)$ обладает N-свойством. Тогда для $f(z)$ справедлива формула Грина*

$$\begin{aligned} \int_C f(z)\, dz &= \int_C (u dx - v dy) + i \int_C (v dx + u dy) = \\ &= -\iint_R (v_x + u_y)\, dxdy + i \iint_R (u_x - v_y)\, dxdy, \end{aligned} \tag{1}$$

где C — граница R и интеграл берется в смысле Лебега.

Доказательство. Покажем, что

$$\iint_R u_y dxdy = -\int_C u dx. \tag{2}$$

Интеграл слева существует по условию. По теореме Фубини имеем

$$\iint_R u_y dxdy = \int_{x_0}^{x_1} dx \int_{y_0}^{y_1} u_y dy.$$

Функция u_y суммируема по y почти для всех $x \in [x_0, x_1]$; с другой стороны, функция u почти для всех $x \in [x_0, x_1]$ обладает N-свойством. Отсюда, по теореме Д. Е. Меньшова об абсолютно непрерывных функциях (см. приложение, 1. 5), почти для всех $\xi \in [x_0, x_1]$ функция $u(\xi, y)$ абсолютно непрерывна по y, следовательно,

$$\int_{y_0}^{y_1} u_y dy = u(\xi, y_1) - u(\xi, y_0), \tag{3}$$

откуда

$$\iint_R u_y dx dy = \int_{x_0}^{x_1} [u(\xi, y_1) - u(\xi, y_0)]\, d\xi = -\int_C u dx.$$

Поступая аналогично с остальными интегралами, получим формулу (1).

Как следствие получаем следующую теорему:

Теорема 5. 4. *Если функция $f(z) = u + iv$ производит квазиконформное отображение односвязной области D, то для любой области D_1, $\overline{D_1} \subset D$, ограниченной спрямляемым контуром C, справедлива формула*

$$\int_C f(z)\, dz = -\iint_{D_1} (v_x + u_y)\, dx dy + i \iint_{D_1} (u_x - v_y)\, dx dy. \tag{4}$$

Доказательство. Теорема 5. 3 очевидно остается в силе, если вместо прямоугольника R взять произвольную область D_1, ограниченную спрямляемым контуром C. Тогда, по доказанному выше (теоремы 4. 1 и 5. 2), $f(z)$ удовлетворяет условиям теоремы 5. 3.

Как следствие получаем следующую теорему Д. Е. Меньшова [6]:

Теорема 5. 5. *Если непрерывная функция $f(z) = u + iv$ однолистна в области D и для каждой точки $z \in D$, исключая быть может конечное или счетное их множество E, отображает бесконечно малый круг с центром в этой точке в бесконечно малый круг* (см. определение 2. 2), *то $f(z)$ или $\overline{f(z)}$ является аналитической функцией в D.*

Доказательство. Из теоремы 4. 1 следует, что $f(z)$ дифференцируема почти всюду в D, значит по теореме 2. 6, либо $f(z)$, либо $\overline{f(z)}$ в зависимости от того, сохраняет ли $f(z)$ направление обхода или нет, является моногенной почти всюду в D. В первом случае мы имеем уравнения

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x,$$

следовательно, по формуле (4),

$$\int\limits_C f(z)\,dz = 0$$

для любого простого спрямляемого контура, лежащего в D, откуда, по теореме Морера, следует, что $f(z)$ является аналитической функцией в D. Если же $f(z)$ меняет направление обхода, то $\overline{f(z)}$ аналитична в D.

Примечание 1. Требование конечности или счетности множества E имеет существенное значение только при доказательстве N-свойства отображения $f(z)$. При этом доказательство проходит без существенных изменений, если предположить лишь, что E почти со всеми сечениями $[D, x]$ и $[D, y]$ области D встречается не более, чем по счетному множеству точек (см. [13], лемма II). Что касается доказательства дифференцируемости $f(z)$ и суммируемости с квадратами частных производных, то достаточно, чтобы множество E имело плоскую меру нуль. Однако, как недавно заметил П. П. Белинский, одно лишь требование, чтобы $mE = 0$, недостаточно для сохранения теоремы Д. Е. Меньшова*.

Примечание 2. Теорема Д. Е. Меньшова существенно обобщает более раннюю теорему Бора [14], которая гласит:

Если функция $f(z)$ непрерывна и однолистна в области D и в каждой точке $z \in D$ существует конечный отличный от нуля предел

$$\Lambda_f(z) = \lim_{h\to 0}\left|\frac{f(z+h)-f(z)}{h}\right|, \tag{5}$$

то $f(z)$ или $\overline{f(z)}$ голоморфна в D.

В самом деле, из условий теоремы Бора следуют условия теоремы Д. Е. Меньшова, но из отображения бесконечно малого круга в бесконечно малый круг (5) еще не следует. Как заметил Д. Е. Меньшов, в формулировке теоремы Бора требование,

---

* П. П. Белинский указал на следующий пример. Построим на сегменте $0 \leqslant x \leqslant 1$ обычное канторово множество P меры нуль и перенесем процесс его построения, с теми же по величине и порядку расположеиия удаляемыми интервалами, на сегмент $0 \leqslant u \leqslant 2$. Тогда на последнем получим канторово множество P_1 с мерой $\operatorname{mes} P_1 = 1$. Ставя в тождественное соответствие друг другу соответствующие интервалы смежности P и P_1, получим топологическое отображение $u = \varphi(x)$ сегмента $[0,1]$ на сегмент $[0,2]$, переводящее P в P_1 и интервалы смежности P тождественно в соответствующие интервалы смежности P_1. Если теперь взять отображение $u = \varphi(x)$ $(0 \leqslant x \leqslant 1)$, $v = y$ $(0 \leqslant y \leqslant 1)$, то получим гомеоморфное отображение квадрата на прямоугольник, переводящее множество меры нуль, проектирующееся на P, в множество положительной меры, проектирующееся на P_1 и конформное с производной, равной 1, на остальной части квадрата. Ясно, что для всего квадрата отображение не будет конформным. Заметим, что для случая всюду разрывного множества E аналогичный пример не построен.

чтобы $\Lambda_f(z) \neq 0$, излишне; кроме того, можно требовать существования $\Lambda_f(z)$ не всюду в D, но всюду, исключая конечное или счетное множество точек $E \subset D$. В таком виде усиление теоремы Бора приводится Д. Е. Меньшовым еще в работе [10]. Доказательство там опирается на такую его теорему:

Соотношение (1) *справедливо, если частные производные существуют почти всюду в* R *и там суммируемы и, кроме того, все производные числа функций* u, v *конечны всюду в* R, *исключая конечное или счетное множество точек.* Последнее условие, содержащееся в этой теореме, позволяет непосредственно получить (3), а также (2) и (1), минуя рассмотрения, связанные с N-свойством функции $f(z)$.

§ 6. ОБОБЩЕННЫЕ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВИДА $au_x + bu_y = v_y$, $du_x + cu_y = -v_x$ *

6. 1. Предварительные замечания.

1°. Мы будем рассматривать системы уравнений

$$au_x + bu_y = v_y, \; du_x + cu_y = -v_x, \; a > 0 \tag{1}$$

эллиптического типа с коэффициентами $a = a(z), \ldots$ непрерывными в данной односвязной области D. Условие эллиптичности системы (1) записывается в виде (см. приложение 2. 1)

$$A = ac - \left(\frac{b+d}{2}\right)^2 > 0. \tag{2}$$

Если система (1) имеет решение u, v, то из (2) и простого подсчета следует, что якобиан этого решения

$$J = u_x v_y - u_y v_x = au_x^2 + (b+d)\, u_x u_y + cu_y^2 > \frac{A(u_x^2 + u_y^2)}{a+c}, \tag{3}$$

следовательно, он положителен всюду, кроме точек, где одновременно обращаются в нуль u_x, u_y, v_x, v_y.

Если коэффициенты системы (1) дифференцируемы и решение u, v дважды дифференцируемо, то, исключая из (1) функции v, получаем уравнение

$$au_{xx} + (b+d)\, u_{xy} + cu_{yy} + (a_x + d_y)\, u_x + (b_x + c_y)\, u_y = 0. \tag{4}$$

---

* Обобщенные решения указанных эллиптических систем были впервые введены и рассмотрены Б. В. Шабатом [2] в связи с изучением дифференциальных свойств квазиконформных отображений. В основе их изучения лежат исследования Хопфа [15, 16].

Аналогично, записывая (1) в виде

$$\frac{a}{B}v_x+\frac{d}{B}v_y=-u_y,\ \ \frac{b}{B}v_x+\frac{c}{B}v_y=u_x, \tag{5}$$

где

$$B=ac-bd\geqslant A \tag{6}$$

и исключая u, получим уравнение

$$\frac{a}{B}v_{xx}+\frac{b+d}{B}v_{xy}+\frac{c}{B}v_{yy}+\left[\left(\frac{a}{B}\right)_x+\left(\frac{b}{B}\right)_y\right]v_x+ \\ +\left[\left(\frac{d}{B}\right)_x+\left(\frac{c}{B}\right)_y\right]v_y=0. \tag{7}$$

Если $b=d$, то уравнения (4) и (7) являются самосопряженными; если же $b=d$ и $ac-b^2=1$, то оба эти уравнения совпадают и система (1) является самосопряженной.

2°. Общая задача квазиконформного отображения, связанная с системой (1), состоит в нахождении такого ее решения u, v, для которого функция $f(z)=u+iv$ осуществляет гомеоморфное отображение данной области D на данную область Δ.

При иекоторых дополнительных ограничениях иа коэффициенты системы (1) последняя имеет всюду дифференцируемое решение с отличным от нуля якобианом, осуществляющее требуемое отображение D на Δ. По теореме 3.5, такое отображенне удовлетворяет системе уравнений

$$\begin{aligned} \alpha u_x+(\beta+\beta_1)\,u_y&=\alpha_1 v_y \\ (\beta-\beta_1)\,u_x+\gamma u_y&=-\alpha_1 v_x, \end{aligned} \tag{8}$$

где α, β, γ; α_1, β_1, γ_1 — характеристики отображеиия. Систему (1) легко привести к виду (8). Для этого достаточно ее записать в таком виде:

$$\frac{au_x+bu_y}{\sqrt{A}}=\frac{v_y}{\sqrt{A}},\ \ \frac{du_x+cu_y}{\sqrt{A}}=-\frac{v_x}{\sqrt{A}}. \tag{9}$$

В самом деле, полагая

$$\frac{\alpha}{\alpha_1}=a,\ \frac{\beta+\beta_1}{\alpha_1}=b,\ \frac{\beta-\beta_1}{\alpha_1}=d,\ \frac{\gamma}{\alpha_1}=c \tag{10}$$

и замечая, что

$$A=\frac{\alpha\gamma-\beta^2}{\alpha_1^2}=\frac{1}{\alpha_1^2},$$

найдем, что

$$\begin{cases} \alpha = \dfrac{a}{\sqrt{A}}, \ \beta = \dfrac{b+d}{2\sqrt{A}}, \ \gamma = \dfrac{c}{\sqrt{A}}, \\ \alpha_1 = \dfrac{1}{\sqrt{A}}, \ \beta_1 = \dfrac{b-d}{2\sqrt{A}}, \ \gamma_1 = \dfrac{ac-bd}{\sqrt{A}} = \dfrac{B}{\sqrt{A}}, \end{cases} \tag{11}$$

откуда и следует, что (9) совпадает с (8).

Таким образом, задание системы (1) с коэффициентами непрерывными в D, порождает в D непрерывное распределение двух пар характеристик, определяемых из (11). Если u, v решение системы (1), то указанные характеристики вскрывают аффинный характер отображения $f(z) = u + iv$ там, где якобиан $J \neq 0$.

Систему (8) будем называть канонической формой системы (1).

3°. В нижеследующей таблице приводятся различные частные случаи системы (1). В дополнение к этой таблице заметим, что перемена местами коэффициентов a и c в системе (1) равносильна изменению Θ на $\frac{\pi}{2}$; перемена же местами коэффициентов b и d означает перемену знака β_1, что эквивалентно отображению бесконечно малых эллипсов $E(p_1, \Theta_1; w)$ относительно их горизонтальных диаметров.

4°. Дополнительные замечания.

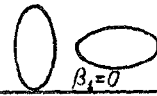
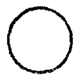
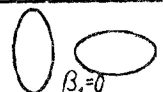
1) Пусть $w = f(z) = u + iv$ и $\tau = \varphi(z) = \rho + i\sigma$ два непрерывно дифференцируемых квазиконформных отображения с отличными от нуля якобианами, удовлетворяющие одной и той же системе (1). Тогда они связаны между собой квазиконформным отображением $\tau = \psi(w)$, переводящим бесконечно малые эллипсы $E(p_1, \Theta_1; w)$ в бесконечно малые эллипсы $E(p_1, \Theta_1; \tau)$, также непрерывно дифференцируемым и с отличным от нуля якобианом. В силу (18) (см. таблицу), функции $\rho(u, v)$ и $\sigma(u, v)$ удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{aligned} \alpha_1\rho_u + 2\beta_1\rho_v &= \alpha_1\sigma_v \\ \gamma_1\rho_v &= -\alpha_1\sigma_u. \end{aligned} \tag{19}$$

Обратно, непрерывно дифференцируемое решение системы (19) связано с x, y системой (1). Таким образом, *система* (1) *инвариантна относительно замены* u, v *функциями* ρ, σ, *связанными с* u, v *системой* (19).

2) Точно также система (1) *инвариантна относительно замены* x, y *на другие независимые переменные, связанные с* x, y *системой уравнений*

$$\begin{aligned} \alpha\xi_x + 2\beta\xi_y &= \alpha\eta_y \\ \gamma\xi_y &= -\alpha\eta_x. \end{aligned} \tag{20}$$

Ограничение на коэф. системы	Плоскость z	Плоскость w	Вид системы	
$b = d;\ ac - b^2 \neq 1$	 p, θ — произвольны	 $\beta_1 = 0$	$au_x + bu_y = v_y$ $bu_x + du_y = -v_x$	(12)
$b = d;\ ac - b^2 = 1$	 p, θ — произвольны	 $p_1 = 1$	$\alpha u_x + \beta u_x = v_y$ $\beta u_x + \gamma u_y = -v_x$	(13)
$b + d = 0;\ a = c$	 $p = 1$	 p_1, θ_1 — произвольны	$au_x + bu_y = v_y \qquad u_x + \beta_1 u_y = \alpha_1 v_y$ $-bu_x + au_y = -v_x \quad -\beta_1 u_x + u_y = -\alpha_1 v_x$	(14)
$b + d = 0;\ a \neq c$	 $\beta = 0$	 p_1, θ_1 — произвольны	$au_x + bu_y = v_y$ $-bu_x + c\,u_y = -v_x$	(15)
$b = d = 0;\ a = c$	 $p = 1$	 $\beta_1 = 0$	$au_x = v_y \qquad a = \begin{cases} \frac{1}{p_1}, \text{ если } \theta_1 = 0 \\ p_1, \ \text{»} \ \ \theta_1 = \frac{\pi}{2} \end{cases}$ $au_y = -v_x$	(16)
$b = d = 0;\ ac = 1$	 $\beta = 0$	 $p_1 = 1$	$au_x = v_y \qquad a = \begin{cases} p, \text{ если } \theta = 0 \\ \frac{1}{p}, \ \text{»} \ \ \theta = \frac{\pi}{2} \end{cases}$ $\frac{1}{a} u_x = -v_x$	(17)
$a = 1;\ d = 0$	 $p = p_1, \quad \theta = \theta_1$		$u_x + bu_y = v_y \qquad \alpha u_x + 2\beta u_y = a v_y$ $cu_y = -v_x \qquad \gamma u_y = -a v_x$	(18)

Имея дело с непрерывно дифференцируемыми отображениями с отличными от нуля якобианами, заметим еще следующее: *одновременная замена* x, y *на* ξ, η, *и* u, v *на* ρ, σ, *удовлетворяющая системам*

$$x_\xi + \beta x_\eta = \alpha y_\eta, \; -\beta x_\xi + x_\eta = -\alpha y_\xi; \tag{21}$$

$$u_\rho + \beta_1 u_\sigma = \alpha_1 v_\sigma, \; -\beta_1 u_\rho + u_\sigma = -\alpha_1 v_\rho, \tag{22}$$

приводит систему (1) *к уравнениям Коши-Римана*

$$\rho_\xi = \sigma_\eta, \; \rho_\eta = -\sigma_\xi. \tag{23}$$

В самом деле, согласно (14) бесконечно малые эллипсы $E(p, \Theta; z)$ и $E(p_1, \Theta_1; w)$ преобразуются при этом в бесконечно малые круги в плоскостях с $\zeta = \xi + i\eta$, $\tau = \rho + i\sigma$, откуда в силу дифференцируемости рассматриваемых отображений получаются уравнения (23).

3) Заметим, наконец, что при тех же предположениях общее решение системы (1) сводится к последовательному решению систем

$$\alpha\xi_x + \beta\xi_y = \eta_y, \; \beta\xi_x + \gamma\xi_y = -\eta_x \tag{24}$$

и

$$u_\xi + \beta_1 u_\eta = \alpha_1 v_\eta, \; -\beta_1 u_\xi + u_\eta = -\alpha_1 v_\xi, \tag{25}$$

что геометрически ясно из рассмотрения (13) и (14).

6. 2. Обобщенные решения и их интегральное представление. Введем следующее определение:

Определение 6. 1. *Пару непрерывных функций* $u(x, y)$, $v(x, y)$ *будем называть обобщенным решением эллиптической системы*

$$\left.\begin{aligned} L[u, v] &= au_x + bu_y - v_y = 0, \\ M[u, v] &= du_x + cu_y + v_x = 0, \\ A &= ac - \left(\frac{b+d}{2}\right)^2 > 0, \; a > 0 \end{aligned}\right| \tag{1}$$

с непрерывными в области D *коэффициентами, если:*

1) *почти всюду в* D *существуют частные производные* u_x, u_y, v_x, v_y, *которые удовлетворяют системе* (1) *и суммируемы со своими квадратами внутри* D, *то есть по всякой области* $D_1, \overline{D_1} \subset D$;

2) *почти для всех горизонтальных и вертикальных сечений области* D *функции* u, v *обладают* N*-свойством* (по Н. Н. Лузину).

Примечание. Приведенное определение несколько шире принятого у Б. В. Шабата [2], у которого оно характеризуется следующими свойствами:

1) функции u, v почти всюду в D обладают полными дифференциалами и удовлетворяют системе (1);

2) частные производные u_x, u_y, v_x, v_y суммируемы со своими квадратами внутри D;

3) функция $f(z) = u + iv$ обладает N-свойством (по Д. Е. Меньшову) на всех горизонтальных и вертикальных сечениях области D;

4) функция $f(z)$ осуществляет внутреннее (по Стоилову) отображение области D на некоторую область Δ.

Это определение ставит своей целью приблизить обобщенное решение к квазиконформному, обладающему указанными свойствами. Однако вопрос о том, когда обобщенное решение u, v приводит к квазиконформному отображению $f(z)$ далек еще от своего полного разрешения.

Чтобы получить нужное нам для изучения дифференциальных свойств обобщенного решения u, v интегральное его представление, зафиксируем произвольную точку $z_0 \in D$ и, наряду с системой (1), рассмотрим систему

$$\begin{aligned} L_0[u, v] &= a_0 u_x + b_0 u_y - v_y \\ M_0[u, v] &= d_0 u_x + c_0 u_y + v_x \end{aligned} \tag{2}$$

с постоянными коэффициентами $a_0 = a(z_0), \ldots, c_0 = c(z_0)$.

Пусть u, v и u^*, v^* — две пары функций, обладающие всеми указанными в определении 6. 1 свойствами, исключая отношение к системе (1). Тогда для всякой области D_1, ограниченной спрямляемым контуром C, расположенным внутри области D, справедливы интегральные соотношения вида

$$\iint_{D_1} u^* u_x dxdy = \int_C u^* u ds - \iint_{D_1} u_x^* u dxdy,$$

ибо функция $u\, u^*$ обладает суммируемой производной $(uu^*)_x$ и тем же N-свойством, что u и u^* (см. теорему 5. 3), с помощью которых получаем следующую формулу Грина:

$$\iint_{D_1} \{u^* L_0[u, v] + v^* M_0[u, v]\, dxdy =$$

$$= \int_C [vu^* - u(b_0 u^* + c_0 v^*)]\, dx + [vv^* + u(a_0 u^* + d_0 v^*)] dy -$$

$$- \iint_D \{u R_0[u^*, v^*] + v S_0[u^*, v^*]\} dxdy, \tag{3}$$

где

$$R_0[u, v] = a_0 u_x + b_0 u_y + d_0 v_x + c_0 v_y,$$
$$S_0[u, v] = v_x - u_y \tag{4}$$

дифференциальные операторы, называемые сопряженными к $L_0[u, v]$ и $M_0[u, v]$ (см. приложение, 2. 2).

Для дальнейшего нам потребуется *фундаментальное решение* системы

$$R_0[u, v] = 0, \ S_0[u, v] = 0. \tag{5}$$

Главное в понятии фундаментального решения то, что оно имеет особенность, позволяющую после подходящего ее изолирования и применения формулы Грина получить путем предельного перехода интегральное представление для исходной системы *.

С учетом второго уравнения первое из уравнений (5), после деления на $\sqrt{A_0}$, где $A_0 = A(z_0)$ и введения характеристик $\alpha_0 = \alpha(z_0)$, $\beta_0 = \beta(z_0)$, $\gamma_0 = \gamma(z_0)$, принимает вид

$$\alpha_0 u_x + 2\beta_0 u_y + \gamma_0 u_y = 0. \tag{6}$$

Если решение системы (5) искать в виде $u = U_x$, $v = U_y$ с неизвестной функцией $U = U(x, y)$, то очевидно $S_0[u, v] = 0$, а уравнение $R_0[u, v] = 0$, в силу (6), можно записать в таком виде:

$$(\alpha_0 U_x + \beta_0 U_y)_x + (\beta_0 U_x + \gamma_0 U_y)_y = 0. \tag{7}$$

Это наводит на мысль ввести еще функцию V, связанную с функцией U уравнениями

$$\alpha_0 U_x + \beta_0 U_y = V_y, \ \beta_0 U_x + \gamma_0 U_y = -V_x. \tag{8}$$

Тогда ясно, что функция $\varphi(z) = U + iV$ осуществляет квазиконформное отображение области D с постоянными характеристиками α_0, β_0, γ_0. Поэтому, если совершить аффинное преобразование $t = l_0(z)$ с указанными характеристиками, то уравнения (8) примут форму уравнений Коши-Римана, и, следовательно, функция $\varphi(z)$ превратится в аналитическую функцию от t, а функции U, V превратятся в сопряженные гармонические функции. В частности такими сопряженными гармоническими функциями являются функции $\ln \frac{1}{|t|}$ и $-\arg t$, из которых первая представляет фундаментальное решение уравнения Лапласа на плоскости t с особенностью в начале координат.

Заметив это и фиксируя точку $\zeta = \xi + i\eta \in D_1$, введем в D_1 неевклидову метрику, полагая

$$\rho_0^2(z, \zeta) = c_0 (x - \xi)^2 - (b_0 + d_0)(x - \xi)(y - \eta) + a_0 (y - \eta)^2, \tag{9}$$

* О фундаментальных решениях см. [17, 18, 19].

что соответствует аффинному преобразованию $t=l_0(z,\zeta)$ с характеристиками α_0, β_0, γ_0, переводящему эллипсы $E(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0; \zeta)$ с уравнениями $\rho_0(z, \zeta)=\mathrm{const}$ в окружности $|t|=\mathrm{const}$. Затем введем „функцию Грина“

$$\Gamma^0(z, \zeta)=\frac{1}{2\pi\sqrt{A_0}}\ln\frac{1}{\rho_0(z, \zeta)}, \tag{10}$$

соответствующую функции $\ln\frac{1}{|t|}$ и за искомое фундаментальное решение системы (5) примем функции

$$u=\Gamma_x^0(z, \zeta), \quad v=\Gamma_y^0(z, \zeta). \tag{11}$$

Кроме того, введем еще сопряженную к $\Gamma^0(z, \zeta)$ гармоническую функцию

$$\Omega^0(z, \zeta)=-\frac{1}{2\pi\sqrt{A_0}}\arg t(z, \zeta), \tag{12}$$

связанную с $\Gamma^0(z, \zeta)$ уравнениями (8):

$$\alpha_0\Gamma_x^0+\beta_0\Gamma_y^0=\Omega_y^0, \quad \beta_0\Gamma_x^0+\gamma_0\Gamma_y^0=-\Omega_x^0. \tag{13}$$

Применяя теперь формулу Грина (3) к функциям u, v и $u^*=\Gamma_x^0$, $v^*=\Gamma_y^0$ и области $D_{1,h}$, получаемой из D_1 удалением внутренности эллипса $E_h(\zeta)$, $\rho_0(z, \zeta)\leqslant h$, будем иметь

$$\iint\limits_{D_{1,h}}\{L_0[u, v]\,\Gamma_x^0+M_0[u, v]\,\Gamma_y^0\}\,dxdy=$$

$$=\int\limits_C(Pdx+Qdy)-\int\limits_{E_h(\zeta)}(Pdx+Qdy), \tag{14}$$

где

$$\left.\begin{aligned}P&=v\,\Gamma_x^0-u(b_0\,\Gamma_x^0+c_0\,\Gamma_y^0),\\ Q&=v\,\Gamma_y^0+u(a_0\,\Gamma_x^0+d_0\,\Gamma_y^0).\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Но

$$a_0\,\Gamma_x^0+d_0\,\Gamma_y^0=\sqrt{A_0}\,[\alpha_0\,\Gamma_x^0+(\beta_0-\beta_{10})\,\Gamma_y^0]=\sqrt{A_0}\,(\Omega_y^0-\beta_{10}\,\Gamma_y^0),$$

$$b_0\,\Gamma_x^0+c_0\,\Gamma_y^0=\sqrt{A_0}\,[(\beta_0+\beta_{10})\,\Gamma_x^0+\gamma_0\,\Gamma_y^0]=\sqrt{A_0}\,(\beta_{10}\,\Gamma_x^0-\Omega_x^0),$$

где $\beta_{10}=\beta_1(z_0)$, следовательно

$$Pdx+Qdy=(v-\sqrt{A_0}\,\beta_{10}\,u)\,d\Gamma^0+\sqrt{A_0}\,ud\Omega^0,$$

и, так как $\Gamma^0=\mathrm{const}$ на $E_h(\zeta)$, то

$$\int\limits_{E_h(\zeta)}Pdx+Q\,dy=\sqrt{A_0}\int\limits_{E_h(\zeta)}u(z)\,d\Omega^0\,(z, \zeta)=-\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}u\,[z\,(t)]\,d\arg t\,(z, \zeta),$$

откуда

$$\lim_{h\to 0}\int Pdx + Qdy = -u(\zeta). \qquad (16)$$

Таким образом, в формуле (14) можно совершить предельный переход $h \to 0$ из которого, с учетом (16), следует, что

$$u(\zeta) = \iint_{D_1} \{L_0[u, v]\Gamma_x^0 + M_0[u, v]\Gamma_y^0\}dxdy - \int_C Pdx + Qdy. \qquad (17)$$

Пусть теперь u, v обобщенное решение системы (1) Тогда систему (2) можно записать в виде

$$\begin{aligned} L_0[u, v] &= -(a - a_0)u_x - (b - b_0)u_y \\ M_0[u, v] &= -(d - d_0)u_x - (c - c_0)u_y \end{aligned} \qquad (18)$$

и из (17), после перестановки местами z и ζ, с учетом соотношений

$$\Gamma_\xi^0(\zeta, z) = -\Gamma_x^0(z, \zeta),\ \Gamma_\eta^0(\zeta, z) = -\Gamma_y^0(z, \zeta),$$

получим искомое интегральное представление для $u(z)$:

$$u(z) = \iint_{D_1}\{[(a - a_0)\Gamma_x^0 + (d - d_0)\Gamma_y^0]u_\xi(\zeta) + [(b - b_0)\Gamma_x^0 +$$

$$+ (c - c_0)\Gamma_y^0]u_\eta(\zeta)\}d\xi d\eta + \int_C [v\Gamma_x^0 - u(b_0\Gamma_x^0 + c_0\Gamma_y^0)]d\xi +$$

$$+ [v\Gamma_y^0 + u(a_0\Gamma_x^0 + d_0\Gamma_y^0)]d\eta. \qquad (19)$$

Представляя систему (1) в виде

$$\begin{aligned} L_1[u, v] &= -a_1v_x - d_1v_y - u_y = 0 \\ M_1[u, v] &= -b_1v_x - c_1v_y + u_x = 0, \end{aligned} \qquad (20)$$

где

$$a_1 = \frac{a}{B},\ b_1 = \frac{b}{B},\ c_1 = \frac{c}{B},\ d_1 = \frac{d}{B},\ B = ac - bd, \qquad (21)$$

получим аналогичное интегральное представление для $v(z)$.

6. 3. Леммы Хопфа *. Напомним следующее. Функция $\varphi(z)$, определенная в области D, удовлетворяет в ней условию

* См [16]. Первая лемма Хопфа (у нас лемма 6. 1) дается в несколько обобщенном виде, именно, вместо условия Гельдера порядка δ $(0 < \delta \leqslant 1)$ рассматривается интегральное условие Гельдера (см. [20]). Формулировка третьей леммы (у нас лемма 6 3) дается в основном по Б. В. Шабату [2] Отметим, что у Хопфа [16] леммы формулируются для n-мерного случая; доказательство по существу то же

Гельдера с показателем $\delta\,(0 < \delta \leqslant 1)$, соответственно интегральному условию Гельдера, если существует такая постоянная $K > 0$, что в первом случае для любых двух точек $z', z'' \in D$ выполняется неравенство

$$|\varphi(z'') - \varphi(z')| < K|z'' - z'|^{\delta},$$

а во втором случае для любой точки $z \in D$ интеграл

$$\iint\limits_{D} \frac{|\varphi(\zeta) - \varphi(z)|}{|\zeta - z|^2}\, d\xi d\eta < K.$$

Функция $\varphi(z)$ удовлетворяет тем же условиям *внутри* области D, если она им удовлетворяет во всякой области D_1, $\overline{D}_1 \subset D$; постоянная K вообще зависит тогда от выбора D_1.

Наконец, функция $\varphi(z)$ удовлетворяет интегральному условию Гельдера в точке $z_0 \in D$, если интеграл

$$\iint\limits_{D} \frac{|\varphi(\zeta) - \varphi(z_0)|}{|\zeta - z_0|^2}\, d\xi d\eta < \infty.$$

Лемма 6. 1. *Пусть в области D заданы ограниченная функция $a(z)$, $|a(z)| < M$ для $z \in D$, удовлетворяющая в точке $z_0 \in D$ интегральному условию Гельдера,*

$$\iint\limits_{D} \frac{|a(\zeta) - a(z_0)|}{|\zeta - z_0|^2}\, d\xi d\eta < \infty \tag{1}$$

и функция $H(z, \zeta)$ для $z \neq \zeta$ непрерывно дифференцируемая по z в замкнутой области D, причем

$$|H(z, \zeta)| < \frac{K}{|\zeta - z|}, \quad |\operatorname{grad} H(z, \zeta)| < \frac{K}{|\zeta - z|^2}, \tag{2}$$

где K некоторая постоянная. Тогда функция

$$\varphi(z, z_0) = \iint\limits_{D} [a(\zeta) - a(z_0)]\, H(z, \zeta)\, d\xi d\eta \tag{3}$$

в точке $z = z_0$ обладает полным дифференциалом и

$$\left.\begin{aligned} \varphi_x(z_0, z_0) &= \iint\limits_{D} [a(\zeta) - a(z_0)]\, H_x(z_0, \zeta)\, d\xi d\eta, \\ \varphi_y(z_0, z_0) &= \iint\limits_{D} [a(\zeta) - a(z_0)]\, H_y(z_0, \zeta)\, d\xi d\eta. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Доказательство. Так как

$$\varphi(z, z_0) - \varphi(z_0, z_0) = \iint_D [a(\zeta) - a(z_0)] [H(z, \zeta) - - H(z_0, \zeta)] \, d\xi \, d\eta$$

и, в силу (1), (2), интегралы справа в (4) существуют, то достаточно показать, что величина

$$\frac{1}{|z-z_0|} \iint_D [a(\zeta) - a(z_0)] [H(z,\zeta) - H(z_0,\zeta) - H_x(z_0,\zeta)(x - x_0) - - H_y(z_0, \zeta)(y - y_0)] \, d\xi \, d\eta \tag{5}$$

стремится к нулю вместе с $|z - z_0|$. Для этого достаточно показать, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для $|z - z_0| < \delta$ часть величины (5), связанная с интегрированием по δ-окрестности $U_\delta(z_0)$ точки z_0, то есть по кругу $|\zeta - z_0| < \delta$, по абсолютной величине меньше ε. В самом деле, если такое δ найдено, то, в силу непрерывной дифференцируемости $H(z, \zeta)$ по z для $z \neq \zeta$, найдется для любого $N > 0$ такое $\delta' = \delta'\left(\frac{\varepsilon}{N}\right) < \delta$, что для $|z - z_0| < \delta'$ и $|\zeta - z_0| > \delta$ будем иметь

$$|H[z,\zeta] - H[z_0, \zeta] - H_x(z_0, \zeta)(x - x_0) - - H_y(z_0, \zeta)(y - y_0)| < \frac{\varepsilon}{N} |z - z_0|$$

и, так как $|a(\zeta)| < M$, то

$$\frac{1}{|z-z_0|} \iint_{D - U_\delta(z_0)} [a(\zeta) - a(z_0)] [H(z, \zeta) - H(z_0, \zeta) - H_x(z_0, \zeta)(x - x_0) - - H_y(z_0, \zeta)(y - y_0)] \, d\xi \, d\eta < \varepsilon,$$

коль скоро N достаточно велико. Так как интегралы (4) от z вообще не зависят и $|x - x_0| \leqslant |z - z_0|$, $|y - y_0| \leqslant |z - z_0|$, то все приводится к доказательству существования такого $\delta(\varepsilon)$, что для $|z - z_0| < \delta$ выполняется неравенство

$$\left| \iint_{|\zeta - z_0| < \delta} [a(\zeta) - a(z_0)] \frac{H(z,\zeta) - H(z_0, \zeta)}{|z - z_0|} \, d\xi \, d\eta \right| < \varepsilon. \tag{6}$$

Подберем $\delta(\varepsilon)$ так, что

$$\iint_{|\zeta - z_0| < 2\delta} \frac{|a(\zeta) - a(z_0)|}{|\zeta - z_0|^2} \, d\xi \, d\eta < \varepsilon^2 \tag{7}$$

и, фиксируя точку $z, |z - z_0| = h < \delta$ оценим часть интеграла (6), приходящуюся на $|\zeta - z_0| < 2h$. В силу (2) имеем

$$\frac{|H(z_0, \zeta)|}{|z - z_0|} = \frac{|\zeta - z_0|}{|z - z_0|} \frac{|\zeta - z_0| \, |H(z_0, \zeta)|}{|\zeta - z_0|^2} < \frac{2K}{|\zeta - z_0|^2},$$

следовательно, в силу (7),

$$\left| \iint\limits_{|\zeta - z_0| < 2h} [a(\zeta) - a(z_0)] \frac{H(z_0, \zeta)}{|z - z_0|} \, d\xi \, d\eta \right| < 2K\varepsilon^2. \tag{8}$$

Для оценки величины

$$\left| \iint\limits_{|\zeta - z_0| < 2h} [a(\zeta) - a(z_0)] \frac{H(z, \zeta)}{|z - z_0|} \, d\xi \, d\eta \right|$$

заметим, что

$$\frac{|H(z, \zeta)|}{|z - z_0|} = \frac{|\zeta - z| \, |H(z, \zeta)|}{|z - z_0| \, |\zeta - z|} < \frac{K}{h \, |\zeta - z|},$$

поэтому для $|\zeta - z| < \varepsilon h$ имеем

$$\left| \iint\limits_{|\zeta - z| < \varepsilon h} [a(\zeta) - a(z_0)] \frac{H(z, \zeta)}{|z - z_0|} \, d\xi \, d\eta \right| < \frac{2MK}{h} \iint\limits_{|\zeta - z| < \varepsilon h} \frac{d\xi \, d\eta}{|\zeta - z|} = 4\pi M K \varepsilon. \tag{9}$$

Если же $|\zeta - z_0| < 2h$ и $|\zeta - z| > \varepsilon h$, то ($\varepsilon < 1$)

$$\left| \frac{\zeta - z_0}{\zeta - z} \right| < 1 + \frac{1}{\varepsilon} < \frac{2}{\varepsilon},$$

поэтому

$$\left| \frac{H(z, \zeta)}{z - z_0} \right| = \left| \frac{\zeta - z_0}{z - z_0} \cdot \frac{\zeta - z_0}{\zeta - z} \cdot \frac{(\zeta - z) H(z, \zeta)}{(\zeta - z_0)^2} \right| < \frac{2K}{\varepsilon \, |\zeta - z_0|^2},$$

следовательно,

$$\left| \iint\limits_{\substack{|\zeta - z_0| < 2h \\ |\zeta - z| > \varepsilon h}} [a(\zeta) - a(z)] \frac{H(z, \zeta)}{|z - z_0|} \, d\xi \, d\eta \right| < \frac{2K}{\varepsilon} \iint \frac{|a(\zeta) - a(z_0)|}{|\zeta - z_0|^2} \, d\xi \, d\eta < 2K\varepsilon. \tag{10}$$

Пусть теперь $2h < |\zeta - z_0| < \delta$. Тогда

$$\left| \frac{H(z, \zeta) - H(z_0, \zeta)}{z - z_0} \right| = \left| \frac{\partial H}{\partial s} \right|_{z = z^*},$$

где s означает дифференцирование в направлении $\overrightarrow{z_0 z}$ и точка z^* лежит между z_0 и z. Так как

$$\left| \frac{\partial H}{\partial s} \right|_{z = z^*} \leqslant \left| \operatorname{grad} H(z^*, \zeta) \right| < \frac{K}{|\zeta - z^*|^2}$$

и $$|\zeta - z_0| < |\zeta - z^*| + |z^* - z_0| < 2|\zeta - z^*|,$$

то $$\left|\frac{H(z,\zeta) - H(z_0,\zeta)}{z - z_0}\right| < \frac{|\zeta - z_0|^2}{|\zeta - z^*|^2} \cdot \frac{K}{|\zeta - z_0|^2} < \frac{4K}{|\zeta - z_0|^2},$$

значит

$$\left|\iint\limits_{2h<|\zeta - z_0|<\delta} [a(\zeta) - a(z_0)] \frac{H(z,\zeta) - H(z_0,\zeta)}{|z - z_0|} \, d\xi \, d\eta \right| < 4K\varepsilon^2. \tag{11}$$

Из оценок (8) — (11) следует, что

$$\left|\int\limits_{|\zeta - z_0|<\delta} [a(\zeta) - a(z_0)] \frac{H(z,\zeta) - H(z_0,\zeta)}{|z - z_0|} \, d\xi \, d\eta \right| < \varepsilon (2K\varepsilon + 4\pi MK + 2K + 4K\varepsilon), \tag{12}$$

что эквивалентно (6) и лемма тем самым доказана.

Лемма 6.1'. *Если в условиях леммы 6.1 в точке z_0 функция $a(z)$ непрерывна и интеграл*

$$\iint \frac{|a(\zeta) - a(z)|}{|\zeta - z|^2} \, d\xi \, d\eta, \quad z \in D \tag{13}$$

существует и сходится в z_0 равномерно, то функция $\varphi(z,z_0)$ леммы 6.1 непрерывно дифференцируема в точке z_0.

Доказательство. Интеграл (13) называется равномерно сходящимся в точке $z_0 \in D$, если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое δ, что для любых z, $|z - z_0| < \delta$, выполняется неравенство

$$\left|\iint\limits_{|\zeta - z_0|<\delta} \frac{|a(\zeta) - a(z)|}{|\zeta - z|^2} \, d\xi \, d\eta \right| < \varepsilon.$$

Отсюда при сделанных предположениях о непрерывности $a(\zeta)$ и свойствах функции $H(z,\zeta)$ вытекает непрерывность в точке z_0 частных производных φ_x, φ_y, представленных интегралами (4), что доказывает непрерывную дифференцируемость $\varphi(z, z_0)$ внутри области D^*.

Примечание. В частности условия леммы 6.1' выполняются, если функция $a(z)$ внутри области D удовлетворяет условию Гельдера порядка δ $(0 < \delta \leqslant 1)$.

Лемма 6.2. *Если в условиях леммы 6.1 функция*

$$\psi(z) = \iint\limits_D H(z,\zeta) \, d\xi \, d\eta \tag{14}$$

* О равномерно сходящихся несобственных интегралах см., например, А. Н. Тихонов и А. А. Самарский „Уравнения математической физики“, 1951, гл. IV, § 5.

обладает частными производными или полным дифференциалом в точке z_0 или, в условиях леммы 6. 1', эта функция непрерывно дифференцируема внутри области D, то теми же свойствами обладает функция

$$f(z)=\iint\limits_D a(\zeta)\,H(z,\zeta)\,d\xi\,d\eta. \tag{15}$$

Доказательство. В самом деле, это следует немедленно из представления $f(z)$ в виде

$$f(z)=a(z_0)\,\psi(z)+\iint\limits_D [a(\zeta)-a(z_0)]\,H(z,\zeta)\,d\xi\,d\eta.$$

Лемма 6. 3. *Если:*

(а) функция $H(z,\zeta,\mathfrak{z})$, определенная для $z,\zeta,\mathfrak{z}$ меняющихся в области D, удовлетворяет в D неравенствам

$$|H|<\frac{K}{|\zeta-z|};\ |H_x|,\ |H_y|<\frac{K}{|\zeta-z|^2};$$

$$|H_{xx}|,\ |H_{xy}|,\ |H_{yy}|<\frac{K}{|\zeta-z|^3} \tag{16}$$

и произведение $|\zeta-z|^2 H_x(z,\ \zeta,\ \mathfrak{z})$, рассматриваемое как функция от $\mathfrak{z}$, удовлетворяет в D условию Гельдера с некоторым показателем $\delta\ (0<\delta\leqslant 1)$;

(б) функция $a(z)$, определенная в D, удовлетворяет условию Гельдера с тем же показателем δ;

(в) функция $\sigma(z)$, определенная в D, непрерывна и ограничена, то функция

$$\psi(z)=\iint\limits_D [a(\zeta)-a(z)]\left[H_x(z,\zeta,\mathfrak{z})\right]_{\mathfrak{z}=z}\sigma(\zeta)\,d\xi\,d\eta \tag{17}$$

удовлетворяет условию

$$|\psi(z'')-\psi(z')|<\mathrm{const}\,|z''-z'|^{\delta}\ln\frac{d}{|z''-z'|}, \tag{18}$$

где d диаметр и z'', z' произвольные две точки D.

При дополнительном предположении (г), что область D ограничена спрямляемым контуром C, $H_x=-H_\xi$, $\delta\neq 1$ и $\sigma(z)$ удовлетворяет в D условию Гельдера с каким-либо показателем, функция (17) внутри D удовлетворяет условию Гельдера с тем же показателем δ.

Доказательство. Чтобы доказать лемму достаточно показать, что ее утверждения справедливы для функции

$$\psi(z, з) = \iint\limits_{D_1} [a(\zeta) - a(z)]\, H_x(z, \zeta, з)\, \sigma(\zeta)\, d\xi\, d\eta \tag{19}$$

по каждому из ее переменных равномерно относительно другого переменного, ибо $\psi(z) = \psi(z, z)$, следовательно

$$\psi(z'') - \psi(z') = [\psi(z'', z'') - \psi(z'', z')] + [\psi(z'', z') - \psi(z', z')].$$

Так как

$$\psi(z, з'') - \psi(z, з') = \iint\limits_{D} \frac{[a(\zeta) - a(z)]\sigma(\zeta)}{|\zeta - z|^2} [|\zeta - z|^2 H_x(z, \zeta, з'') -$$

$$- |\zeta - z|^2 H_x(z, \zeta, з')]\, d\xi\, d\eta,$$

то из условии леммы следует, что

$$\psi | (z, з'') - \psi(z, з') | < \text{const}\, |з'' - з'|^{\delta} \iint\limits_{D} \frac{d\xi\, d\eta}{|\zeta - z|^{2-\delta}}\ \ \text{const}\ |з'' - з'|^{\delta}. \tag{20}$$

Пусть теперь z', z'' две произвольные точки $D, |z'' - z'| =) = \frac{r}{2}$ и K_r — пересечение D с кругом $|z - z'| < r$. Тогда, полагая

$$P(z, \zeta, з) = [a(\zeta) - a(z)]\, \sigma(\zeta)\, H_x(z, \zeta, з), \tag{21}$$

можем написать

$$\psi(z'', з) - \psi(z', з) = I_1 + I_2 + I_3, \tag{22}$$

где

$$I_1 = \iint\limits_{K_r} [P(z'', \zeta, з) - P(z', \zeta, з)]\, d\xi\, d\eta,$$

$$I_2 = \iint\limits_{D - K_r} [a(\zeta) - a(z'')]\, \sigma(\zeta)\, [H_x(z'', \zeta, з) - H_x(z', \zeta, з)]\, d\xi\, d\eta,$$

$$I_3 = [a(z') - a(z'')] \iint\limits_{D - K_r} \sigma(\zeta)\, H_x(z', \zeta, з)\, d\xi\, d\eta.$$

Из условий леммы видно, что

$$|P(z, \zeta, з)| < \frac{\text{const}}{|\zeta - z|^{2-\delta}},$$

поэтому

$$|I_1| < \text{const} \iint\limits_{K_r} \left[\frac{1}{|\zeta - z'|^{2-\delta}} + \frac{1}{|\zeta - z''|^{2-\delta}} \right] d\xi\, d\eta,$$

откуда легко следует, что

$$|I_1| < \text{const} \int_0^{2r} \frac{d\rho}{\rho^{1-\delta}} = \text{const}\, \frac{(2r)^\delta}{\delta} < \text{const}\, |z'' - z'|^\delta. \tag{23}$$

Для оценки I_2 заметим, что

$$H_x(z'', \zeta, з) - H_x(z', \zeta, з) = (z'' - z')\, H_{xs}(z^*, \zeta, з),$$

где s означает дифференцирование в направлении $\overline{z'\,z''}$, а z^* есть некоторая точка на этом направлении между z' и z'', зависящая вообще от ζ и з. В силу (16) имеем

$$|H_x(z'', \zeta, з) - H_x(z', \zeta, з)| < \text{const}\, \frac{r}{|\zeta - z^*|^3}.$$

Далее, для точек $\zeta \in D - K_r$ очевидно $|\zeta - z^*| > \frac{1}{2}|\zeta - z'|$ и $|\zeta - z''| < \frac{3}{2}|\zeta - z'|$, поэтому

$$|a(\zeta) - a(z'')| < \text{const}\, |\zeta - z''|^\delta < \text{const}\, |\zeta - z'|^\delta,$$

следовательно,

$$|I_2| < \text{const}\, r \iint\limits_{D-K_r} \frac{d\xi\, d\eta}{|\zeta - z'|^{3-\delta}} < \text{const}\, r \int_r^d \frac{d\rho}{\rho^{2-\delta}},$$

где d диаметр области D. Если $\delta \neq 1$, то

$$|I_2| < \text{const}\, r\, \frac{1}{1-\delta}\left(\frac{1}{r^{1-\delta}} - \frac{1}{d^{1-\delta}}\right) < \text{const}\, r^\delta,$$

если же $\delta = 1$, то

$$|I_2| < \text{const}\, r \ln \frac{d}{r},$$

значит

$$|I_2| < \begin{cases} \text{const}\, |z'' - z'|^\delta, \text{ если } \delta \neq 1, \\ \text{const}\, |z'' - z'| \ln \frac{d}{|z'' - z'|}, \text{ если } \delta = 1. \end{cases} \tag{24}$$

Для оценки I_3 заметим, что

$$\left|\iint\limits_{D-K_r} \sigma(\overline{\zeta})\, H_x(z', \zeta, з)\, d\xi d\eta\right| < \text{const} \iint\limits_{D-K_r} \frac{d\xi d\eta}{|\zeta - z'|^2} <$$

$$< \text{const} \int_r^d \frac{d\rho}{\rho} = \text{const}\, \ln \frac{d}{r}$$

и, так как $|a(z') - a(z'')| < \text{const}\, |z' - z''|^\delta$, то $$\left|I_3\right| < \text{const}\ |z''-z'|^{\delta}\ln\frac{d}{|z''-z'|}. \qquad (25)$$

Из (23), (24) и (25) следует, что разность (22) удовлетворяет неравенству вида (18), откуда из вышесказанного следует первая часть леммы 6. 3.

Предполагая теперь, что выполняется условие (г) и что точки z', z'' принадлежат области D_1, $\overline{D}_1 \subset D$, покажем, что

$$|\psi(z'', з) - \psi(z', з)| < \text{const}\,|z''-z'|^{\delta}, \qquad (26)$$

где постоянная зависит вообще от D_1. Тогда из (20) и (26) будет следовать вторая часть леммы 6. 3.

Для доказательства (26) достаточно рассмотреть случай, когда замкнутый круг $\overline{K}_r \subset D$, потому что всякую замкнутую подобласть $\overline{D}_1$ области D можно покрыть конечным числом таких кругов. При этом достаточно только улучшить оценку I_3, ибо оценки для I_1, I_2 дают то, что нужно.

Имеем

$$\iint\limits_{D-K_r}\sigma(\zeta)\,H_x(z', \zeta, з)\,d\xi d\eta = \iint\limits_{D-K_r}[\sigma(\zeta)-\sigma(z')]\,H_x(z', \zeta, з)\,d\xi d\eta +$$

$$+\sigma(z')\iint\limits_{D-K_r}H_x(z', \zeta, з)\,d\xi d\eta. \qquad (27)$$

Так как $\sigma(z)$ теперь удовлетворяет условию Гельдера с некоторым показателем, то первый интеграл по абсолютной величине ограничен. Что касается второго интеграла, то, учитывая, что $H_x = -H_\xi$, имеем

$$\iint\limits_{D-K_r}H_x(z', \zeta, з)\,d\xi\,d\eta = \int\limits_{C_r}H(z', \zeta, з)\,d\eta -$$

$$-\int\limits_{C}H(z', \zeta, з)\,d\eta,$$

где C_r окружность $|\zeta - z'| = r$. Далее,

$$\left|\int\limits_{C_r}H(z', \zeta, з)\,d\eta\right| < \frac{\text{const}}{r}\int\limits_{-r}^{r}d\eta < \text{const},$$

затем, если h расстояние от C_r до C и l длина C, то

$$\left|\int\limits_{C}H(z', \zeta, з)\,d\eta\right| < \frac{\text{const}\cdot l}{h},$$

следовательно второй интеграл справа в (27) также ограничен и вместо (25) получаем оценку

$$|I_3| < \text{const.}\ |z'' - z'|^{\delta}, \tag{28}$$

где постоянная зависит от h, а в более общем случае от расстояния между границами областей D_1 и D.

6. 4. Дифференциальные свойства обобщенных решений. Рассмотрим снова эллиптическую систему

$$\left.\begin{aligned} &au_x + bu_y = v_y,\ du_x + cu_y = -v_x, \\ &A = ac - \left(\frac{b+d}{2}\right)^2 > 0,\ a > 0 \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

и положим

$$\rho^2(z, \zeta, з) = c(з)(x-\xi)^2 -$$

$$-[b(з) + d(з)](x-\xi)(y-\eta) + a(з)(y-\eta)^2, \tag{2}$$

$$\Gamma(z, \zeta, з) = \frac{1}{2\pi\sqrt{A(з)}} \ln \frac{1}{\rho(z, \zeta, з)}. \tag{3}$$

Тогда справедливы следующие утверждения (см. [15] и [2]):

а) Существуют такие величины $\omega, \omega_1, \ldots, \omega_n, \ldots$, зависящие от з и ограниченные вместе с $a(з), \ldots, c(з)$ и $\frac{1}{A(з)}$, что для всех $z, \zeta \in D$ выполняются неравенства

$$\frac{1}{\rho} < \frac{\omega}{|\zeta - z|};\ |\Gamma_x|,\ |\Gamma_y| < \frac{\omega_1}{|\zeta - z|}, \ldots, \left|\frac{\partial^n \Gamma}{\partial x^n}\right|, \ldots, \left|\frac{\partial^n \Gamma}{\partial y^n}\right| <$$

$$< \frac{\omega}{|\zeta - z|^n}; \ldots \tag{4}$$

б) Если коэффициенты системы (1) удовлетворяют в области D условию Гельдера с показателем $\delta\,(0 < \delta \leqslant 1)$, то произведения $|\zeta - z|^n \frac{\partial^n \Gamma}{\partial x^n}, \ldots, |\zeta - z|^n \frac{\partial^n \Gamma}{\partial y^n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, рассматриваемые как функции от з, удовлетворяют внутри D условию Гельдера с тем же показателем δ, равномерно относительно $z, \zeta \in D$. Иными словами, для всякой области D_1, $\overline{D}_1 \subset D$ существуют такие постоянные K_n, зависящие вообще от выбора D, что для любых $з', з'' \in D_1$ и любых $z, \zeta \in D$ выполняются неравенства вида

$$\left| |\zeta - z|^n \frac{\partial^n \Gamma(z, \zeta, з'')}{\partial x^n} - |\zeta - z|^n \frac{\partial^n \Gamma(z, \zeta, з')}{\partial x^n} \right| < K_n |з'' - з'|^{\delta}. \tag{5}$$

Остановимся на первом из неравенств (4). Определяя обычным способом минимум положительной квадратичной формы

(2) при условии, что $|\zeta - z| = r^2$, найдем, что $\rho^2 \geqslant \lambda r^2$, где λ меньший из корней уравнения

$$\begin{vmatrix} c-\lambda & -\frac{b+d}{2} \\ -\frac{b+d}{2} & a-\lambda \end{vmatrix} = 0, \tag{6}$$

откуда убеждаемся, что $\lambda > \frac{A}{a+c}$, следовательно

$$\frac{1}{\rho} < \sqrt{\frac{a+c}{A}}\frac{1}{r}.$$

После этого легко получить остальные неравенства (4) и (5), рассматривая соответствующие производные от Г.

Опираясь на интегральное представление обобщенных решений, леммы Хопфа и свойства функции $\Gamma(z, \zeta, з)$, мы можем теперь доказать следующие теоремы Б. В. Шабата [2] о дифференциальных свойствах обобщенных решений системы (1).

Теорема 6. 1. *Если коэффициенты системы* (1) *равномерно ограничены в окрестности D_1 точки $z_0 \in D$ и интегралы*

$$\iint\limits_{D_1} \frac{|a(\zeta) - a(z_0)|}{|\zeta - z_0|^2} d\xi d\eta, \ldots, \iint\limits_{D_1} \frac{|d(\zeta) - d(z_0)|}{|\zeta - z_0|^2} d\xi d\eta \tag{7}$$

сходятся, то произвольное обобщенное решение системы (1), *имеющее почти всюду в D_1 равномерно ограниченные частные производные, дифференцируемо в точке z_0.*

При дополнительном требовании непрерывности коэффициентов системы (1) *в точке z_0 и равномерной сходимости в этой точке интегралов*

$$\iint\limits_{D_1} \frac{|a(\zeta) - a(z)|}{|\zeta - z|^2} d\xi d\eta, \ldots, z \in D, \tag{8}$$

частные производные от u, v непрерывны в точке z_0.

Доказательство. Уменьшая если нужно область D_1, можно считать, что она ограничена спрямляемым контуром C, лежащим целиком внутри области D. Заметив это, воспользуемся интегральным представлением 6. 2 (19) обобщенного решения u, v системы (1), используя там в качестве точки z_0 интересующую нас теперь точку z_0. Линейные интегралы, входящие в 6. 2 (19), очевидно, можно дифференцировать в точке z_0 под знаком интеграла, поэтому остается рассмотреть лишь двойные интегралы вида

$$\iint\limits_{D_1} [a(\zeta) - a(z_0)]\, \Gamma_x^0(z, \zeta)\, u_\xi(\zeta)\, d\xi d\eta. \tag{9}$$

Так как по условию теоремы функция $u_\xi(\zeta)$ определена и равномерно ограничена почти всюду в D_1, то функция

$$H(z, \zeta) = \Gamma_x^0(z, \zeta)\, u_\xi(\zeta) = \Gamma_x(z, \zeta, z_0)\, u_\xi(\zeta),$$

а также функция $a(z)$ удовлетворяют условиям леммы 6. 1, и поэтому интеграл (9) дифференцируем в точке $z = z_0$ под знаком интеграла.

Таким образом, полагая $\Gamma_{xx}^0 = \Big[\Gamma_{xx}(z, \zeta, z_0)\Big]_{z=z_0}$, имеем

$$\begin{aligned} u_x(z_0) = \iint\limits_{D_1} \Big\{ &\Big[(a - a_0)\Gamma_{xx}^0 + (d - d_0)\Gamma_{xy}^0\Big] u_\xi(\zeta) + \\ &+ \Big[(b - b_0)\Gamma_{xx}^0 + (c - c_0)\Gamma_{xy}^0\Big] u_\eta(\zeta)\Big\} d\xi d\eta + \\ &+ \int\limits_C \Big[v(\zeta)\Gamma_{xx}^0 - u(\zeta)\,(b_0\Gamma_{xx}^0 + c_0\Gamma_{xy}^0)\Big] d\xi + \\ &+ \Big[v(\zeta)\Gamma_{xy}^0 + u(\zeta)\,(a_0\Gamma_{xx}^0 + d_0\Gamma_{xy}^0)\Big] d\eta \end{aligned} \tag{10}$$

и аналогичные формулы для остальных частных производных.

Если выполняются дополнительные условия теоремы, то непрерывная дифференцируемость (9) в точке z_0 следует из леммы 6. 1′, откуда следует последняя часть доказываемой теоремы.

Примечание. Из теоремы 6. 1 видно, что дифференциальные свойства обобщенного решения системы (1) зависят лишь от поведения коэффициентов системы вблизи рассматриваемой точки.

Теорема 6. 2. *Если коэффициенты системы* (1) *удовлетворяют в D условию Гельдера с показателем $\delta\ (0 < \delta \leqslant 1)$, то произвольное обобщенное решение системы* (1), *имеющее почти всюду в D равномерно ограниченные частные производные, дифференцируемо всюду в D и частные производные удовлетворяют внутри D условию Гельдера с тем же показателем δ, „испорченным“ на логарифм, если $\delta = 1$:*

$$|u_x(z'') - u_x(z')| < \begin{cases} \text{const}\ |z'' - z'|^\delta, & \text{если } 0 < \delta < 1 \\ \text{const}\ |z'' - z'|^\delta\, |\ln|z'' - z'||, & \text{если } \delta = 1. \end{cases} \tag{11}$$

Доказательство. Непрерывная дифференцируемость u, v в D следует из теоремы 6. 1. В силу (10), внутри области D_1, ограниченной произвольным спрямляемым контуром C, лежащим внутри D, имеем

$$u_x(z) = \iint_{D_1} [a(\zeta) - a(z)]\, \Gamma^z_{xx} u_\xi(\zeta)\, d\xi d\eta + \ldots$$

$$\ldots + \int_C v(\zeta)\, \Gamma^z_{x\lambda}\, d\xi + \ldots, \qquad (12)$$

где $\Gamma^z_{xx} = [\Gamma_{xx}(z, \zeta, з)]_{з=z}$. Линейные интегралы, входящие в (12), внутри D_1 очевидно удовлетворяют условию Гельдера с показателем δ. Что касается двойных интегралов, входящих в (12), то первый из них можно представить в виде

$$\iint_{D_1} [a(\zeta) - a(z)]\ [H_x(z, \zeta, з)]_{з=z}\, \sigma(\zeta)\, d\xi d\eta, \qquad (13)$$

где $H(z, \zeta, з) = \Gamma_\lambda(z, \xi, з)$ и $\sigma(\zeta) = u_\xi(\zeta)$. При этом выполняются условия леммы 6. 3: для $H(z, \zeta, з)$ — это следует из указанных выше свойств (4) и (5) функции $\Gamma(z, \zeta, з)$, а для $\sigma(z)$ — из теоремы 6. 1, откуда и следует, что интегралы (12) внутри D_1 удовлетворяют условию Гельдера с показателем δ, испорченным на логарифм (см. 6. 3, (18)).

Следовательно, функция $\sigma(z)$ удовлетворяет дополнительному условию (г), указанному в лемме 6. 3, а затем, в силу свойств функции $\Gamma(z, \zeta, з)$, имеем $H_x = -H_\xi$. Поэтому, применяя вторую часть леммы 6. 3, заключаем, что интегралы (12) внутри D_1 удовлетворяют условию Гельдера с тем же показателем δ, если $\delta \neq 1$. Все это приводит нас ко всем утверждениям доказываемой теоремы.

Теорема 6. 3. *Если в окрестности D_1 точки $z_0 \in D$ коэффициенты системы* (1) *непрерывно дифференцируемы и в точке z_0 их частные производные удовлетворяют интегральному условию Гельдера,*

$$\iint_{D_1} \frac{|a_\xi(\zeta) - a_x(z_0)|}{|\zeta - z_0|^2}\, d\xi d\eta < \infty, \ldots, \qquad (14)$$

то произвольное обобщенное решение u, v системы (1), *имеющее почти всюду в D_1 равномерно ограниченные производные числа, дважды дифференцируемо в точке z_0.*

При дополнительном требовании сходимости интегралов

$$\iint_{D_1} \frac{|a_\xi(\zeta) - a_x(z)|}{|\zeta - z|^2}\, d\xi d\eta, \ldots, \ z \in D_1 \qquad (15)$$

и равномерной их сходимости в точке z_0, функции u, v непрерывно дифференцируемы в точке z_0.

Доказательство. Воспользуемся формулой (12). Из условий теоремы следует непрерывная дифференцируемость вблизи z_0 линейных интегралов, входящих в (12). Относительно двойных интегралов, входящих в (12), заметим сначала, что $\Gamma^z_{xx} = -\Gamma^z_{\xi\xi}$, а

$$\left[a(\zeta) - a(z)\right]\Gamma^z_{\xi\xi} = \frac{\partial}{\partial\xi}\left\{\left[a(\zeta) - a(z)\right]\Gamma^z_{\xi}\right\} - a_\xi(\zeta)\,\Gamma^z_{\xi},$$

откуда

$$\iint\limits_{D_1}\left[a(\zeta) - a(z)\right]\,\Gamma^z_{\xi\xi}\,d\xi d\eta = -\iint\limits_{D_1} a_\xi(\zeta)\,\Gamma^z_{\xi}\,d\xi d\eta + \int\limits_{C}\ldots \tag{16}$$

Полученный здесь линейный интеграл снова непрерывно дифференцируем вблизи z_0; к двойному же можно применить лемму 6. 2, полагая $H(z, \zeta) = \Gamma^z_{\xi}$ и используя $a_x(z)$ в качестве функции $a(z)$ этой леммы. Легко тогда убедиться, что вблизи z_0 выполняются неравенства 6. 3 (2) и функция 6. 3 (14), которую можно представить в виде линейного интеграла от Γ^z, непрерывно дифференцируема вблизи z_0 для $z \neq \zeta$. Поэтому, на основании указанной леммы заключаем, что функция (16) дифференцируема в точке z_0 при выполнении общих условий доказываемой теоремы, и непрерывно дифференцируема в точке z_0 при выполнении дополнительных ее условий.

В (12) мы имели дело с двойными интегралами вида

$$\iint\limits_{D_1}\left[a(\zeta) - a(z)\right]\;\Gamma^z_{xx}\,u_\xi(\zeta)\,d\xi d\eta, \tag{17}$$

отличными от (16). Применим снова лемму 6. 2, полагая $H(z, \zeta) = [a(\zeta) - a(z)]\,\Gamma^z_{xx}$ и используя вместо $a(z)$ функцию $u_x(z)$, что возможно, ибо новая функция $H(z, \zeta)$ удовлетворяет условиям леммы 6. 2 по доказанному выше, а $u_x(z)$ — по теореме 6. 2. Из леммы 6. 2 следует тогда дифференцируемость, соответственно непрерывная дифференцируемость (17), следовательно и (12) в точке z_0.

Примечание. Условия теоремы 6. 3, включая дополнительные условия, выполняются, например, в том случае, когда частные производные коэффициентов системы (1) удовлетворяют условию Гельдера с некоторым показателем δ. Можно показать также (см. [16]), что в этом случае вторые частные производные решения u, v удовлетворяют условию Гельдера с тем же показателем δ, если $\delta \neq 1$.

§ 7. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА КВАЗИКОНФОРМНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ*.

7. 1. Распределение характеристик. Мы говорим, что квазиконформное отображение $f(z)=u+iv$ области D обладает характеристиками, удовлетворяющими в D (внутри D) условию Гельдера с показателем δ $(0<\delta\leqslant 1)$, соответственно интегральному условию Гельдера, если характеристики α, β, γ; α_1, β_1, γ_1 удовлетворяют в D (внутри D) этим условиям.

Из неравенств 1. 1 (10) следует, что характеристики p, p_1 удовлетворяют тогда тем же условиям, а характеристики Θ, Θ_1 — тем же условиям в любой замкнутой подобласти D, где $pp_1\neq 1$. Обратно, из неравенств 1. 1 (11) следует, что там, где характеристики p, Θ; p_1, Θ_1 удовлетворяют указанным выше условиям, там характеристики α, β, γ; α_1, β_1, γ_1 удовлетворяют тем же условиям.

Если же u, v является обобщенным решением системы

$$au_x+bu_y=v_y,\quad du_x+cu_y=-v_x,$$

то из формул 6. 1 (10) следует, что коэффициенты a, b, c, d удовлетворяют указанным выше соотношениям одновременно с характеристиками отображения $f(z)$; а из 6. 1 (11) следует, что если a, b, c, d удовлетворяют указанным выше условиям, то характеристики отображения $f(z)$ удовлетворяют тем же условиям там, где величина A ограничена снизу положительным числом, во всяком случае в любой замкнутой подобласти области D.

Докажем теперь следующую лемму:

Лемма 7. 1. Пусть в области D задано непрерывное распределение характеристик α, β, γ, для которых интегралы

$$I_\alpha(z_0)=\iint\limits_D \frac{|\alpha(z)-\alpha(z_0)|}{|z-z_0|^2}\,dxdy,\ I_\beta(z_0),\ I_\gamma(z_0),\ z_0\in D, \tag{1}$$

равномерно ограничены внутри D. Пусть $t=l(z, z_0)$ — аффинное преобразование с характеристиками $\alpha_0=\alpha(z_0)$, β_0, γ_0 и $\zeta=\varphi(t)$ функция, конформно отображающая область $D_t=l(D)$ на круг $|\zeta|<1$ так, что $\varphi(t_0)=0$, где $t_0=l(z_0, z_0)$. Тогда, если $p(\zeta, z_0)$, $\Theta(\zeta, z_0)$ соответствующие преобразованные характеристики, то интеграл

$$I(z_0)=\iint\limits_{|\zeta|<1}\frac{p(\zeta, z_0)-1}{|\zeta|^2}\,d\xi d\eta \tag{2}$$

равномерно ограничен внутри D.

---

* Излагаемые ниже результаты в основном принадлежат Б. В. Шабату (см. [2]).

Доказательство. Пусть область D односвязна и D произвольная ее подобласть, для которой область $D - D_1$ двусвязна.

При конформном отображении $\zeta = \varphi(t)$ характеристика p не меняется, поэтому $p(\zeta, z_0) - 1 = p(t, z_0) - 1$, следовательно (см. 1. 1 [10])

$$p(\zeta, z_0) - 1 < |\alpha(t, z_0) - 1| + |\beta(t, z_0)| + |\gamma(t, z_0) - 1|.$$

Но при любом аффинном преобразовании с характеристиками p_0, Θ_0 величины α, β, γ изменяются аффинно,

$$\alpha' = a_{11}\alpha + a_{12}\beta + a_{13}\gamma$$
$$\beta' = a_{21}\alpha + a_{22}\beta + a_{23}\gamma$$
$$\gamma' = a_{31}\alpha + a_{32}\beta + a_{33}\gamma,$$

причем коэффициенты по абсолютной величине не превосходят величины Kp_0, где $K < 20$*. Отсюда в частности и следует, что разности вида $\alpha_2 - \alpha_1$, $\beta_2 - \beta_1$, $\gamma_2 - \gamma_1$ изменяются аффинно. Так как при нашем аффинном отображении $t = l(z, z_0)$ имеем $\alpha(z_0, z_0) = \gamma(z_0, z_0) = 1$, $\beta(z_0, z_0) = 0$, то из предыдущего следует, что

$$p(\zeta, z_0) - 1 < \text{const}\ \ p(z_0)\,[|\alpha(z) - \alpha(z_0)| + |\beta(z) - \beta(z_0)| + |\gamma(z) - \gamma(z_0)|]$$

или, так как $p(z_0)$ ограничено в D_1, то

$$p(\zeta, z_0) - | < \text{const}\ \ [\,|\alpha(z) - \alpha(z_0)| + |\beta(z) - \beta(z_0)| + |\gamma(z) - \gamma(z_0)|\,], \tag{2}$$

где постоянная вообще зависит от выбора D_1.

Пусть μ модуль двусвязной области $G = D - D_1$, μ^* — модуль двусвязной области $G_t = l(G)$. Тогда известно (см. приложение, 3. 5), что $\mu^* \leqslant \mu^{p(z_0)}$, а тогда (см. там же) внутренняя граница области $G_\zeta = \varphi(G_t)$ отстоит от единичной окружности $|\zeta| = 1$ на расстояние $\delta = \delta(\mu^*) > 0$.

Обозначим через $t = \psi(\zeta)$ функцию, обратную к $\zeta = \varphi(t)$. По известным формулам искажения (см. приложение, 3. 4) имеем.

$$|\psi'(0)|\,\frac{|\zeta|}{(1+|\zeta|)^2} \leqslant |\psi(\zeta) - \psi(0)| \leqslant |\psi'(0)|\,\frac{|\zeta|}{(1-|\zeta|)^2},$$

$$|\psi'(0)|\,\frac{1-|\zeta|}{(1+|\zeta|)^3} \leqslant |\psi'(\zeta)| \leqslant |\psi'(0)|\,\frac{1+|\zeta|}{(1-|\zeta|)^3},$$

* Предоставляем это доказать читателю. Изменение α, β, γ удобно рассмотреть сначала при вращении, затем при растяжении в одном направлении в p_0 раз.

откуда следует, что

$$d\sigma_\zeta = \frac{d\sigma_\zeta}{d\sigma_t} d\sigma_t = |\varphi'(t)|^2 d\sigma_t \leqslant \frac{1}{|\psi'(0)|^2} \frac{(1+|\zeta|)^6}{(1-|\zeta|)^2},$$

$$\frac{1}{|\zeta|^2} = \left|\frac{t-t_0}{\zeta}\right|^2 \frac{1}{|t-t_0|^2} \leqslant \frac{|\psi'(0)|^2}{(1-|\zeta|)^4} \frac{1}{|t-t_0|^2},$$

($d\sigma$ — элемент площади), следовательно

$$\frac{d\sigma_\zeta}{|\zeta|^2} \leqslant \left(\frac{1+|\zeta|}{1-|\zeta|}\right)^6 \frac{d\sigma_t}{|t-t_0|^2}. \tag{4}$$

Для удобства дальнейших расчетов выберем $t = l(z, z_0)$ в виде растяжения в $p(z_0)$ раз в направлении $\Theta(z_0) + \frac{\pi}{2}$. Тогда $|z - z_0| \leqslant |t - t_0| \leqslant p(z_0)\,|z - z_0|$ и

$$d\sigma_t = \frac{d\sigma_t}{d\sigma_z} d\sigma_z = p(z_0)\, d\sigma_z,$$

значит

$$\frac{d\sigma_t}{|t-t_0|^2} \leqslant p(z_0) \frac{d\sigma_z}{|z-z_0|^2}. \tag{5}$$

Из (4) и (5) имеем

$$\frac{d\sigma_\zeta}{|\zeta|^2} \leqslant p(z_0)\left(\frac{1+|\zeta|}{1-|\zeta|}\right)^6 \frac{d\sigma_z}{|z-z_0|^2} < \text{const}\ \frac{d\sigma_z}{|z-z_0|^2}, \tag{6}$$

ибо, как было указано выше, $1 - |\zeta| > \delta$ для $z \in D_1$. Из (3) и (6) имеем

$$\frac{p(\zeta, \bar{z}_0) - 1}{|\zeta|^2} d\sigma_\zeta <$$

$$< \text{const}\ \frac{|\alpha(z) - \alpha(z_0)| + |\beta(z) - \beta(z_0)| + |\gamma(z) - \gamma(z_0)|}{|z - z_0|^2} d\sigma_z, \tag{7}$$

откуда следует равномерная ограниченность интеграла (2) внутри области D.

Примечание. Как видим, строгое доказательство достаточно очевидной леммы 7. 1 оказалось довольно длинным. Аналогично можно показать, что если внутри D характеристики α, β, γ удовлетворяют условию Гельдера с показателем δ, то это условие, с тем же показателем, но другими постоянными, сохраняется и для преобразованных характеристик внутри круга $|\zeta| < 1$.

7. 2. Лемма о растяжении. Докажем сначала следующую лемму *.

Лемма 7. 2. *Пусть функция* $w = f(z)$ *отображает кольцо* $r < |z| < 1$ *на кольцо* $\rho < |w| < 1$ *квазиконформно с характеристиками* p, Θ; p_1, Θ_1. *Тогда*

$$\left| \ln \frac{\rho}{r} \right| \leqslant \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{r < |z| < 1} \frac{pp_1 - 1}{|z|^2} \, d\sigma_z . \tag{1}$$

Доказательство. Перейдем к плоскостям $\zeta = \xi + i\eta = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{z}$ и $\omega = \tau + ih = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{w}$. Тогда получим квазиконформное отображение $\omega = \varphi(\zeta)$ прямоугольника $R_\zeta : 0 < \xi < M$ $\left(M = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r}\right)$, $0 < \eta < 1$ на прямоугольник $R_\omega : 0 < \tau < M^*$ $\left(M^* = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{\rho}\right)$, $0 < h < 1$, а соотношение (1) примет вид

$$|M^* - M| \leqslant \iint\limits_{R_\zeta} (pp_1 - 1) \, d\xi d\eta. \tag{2}$$

Площадь прямоугольника R_ω равна M^*. Если $J(\zeta)$ якобиан отображения $\omega = \varphi(\zeta)$ и $\Lambda(\zeta) = \lim\limits_{h \to 0} \left| \frac{\varphi(\zeta + h) - \varphi(\zeta)}{h} \right|$, то $J \geqslant \frac{\Lambda^2}{pp_1}$ и

$$M^* = \iint\limits_{R_\zeta} J d\xi d\eta \geqslant \iint\limits_{R_\zeta} \frac{\Lambda^2}{pp_1} d\xi d\eta = \int\limits_0^M d\xi \int\limits_0^1 \frac{\Lambda^2}{pp_1} d\eta.$$

Так как очевидно $\int\limits_0^1 \Lambda d\eta \geqslant 1$, то, используя неравенство Буняковского, имеем

$$\int\limits_0^1 \frac{\Lambda^2}{pp_1} d\eta \cdot \int\limits_0^1 pp_1 d\eta \geqslant \left(\int\limits_0^1 \Lambda d\eta \right)^2 \geqslant 1,$$

поэтому

$$M^* \geqslant \int\limits_0^M \frac{d\xi}{\int\limits_0^1 pp_1 d\eta}, \tag{3}$$

* Приводим ее в формулировке П. П. Белинского ([21], лемма 1), с некоторым отличием в доказательстве.

следовательно

$$M - M^* \leqslant \int_0^M \frac{\int_0^1 pp_1 d\eta - 1}{\int_0^1 pp_1 d\eta} d\xi < \iint_{R_\zeta} (pp_1 - 1)\, d\xi d\eta.$$

С другой стороны, если $\int_0^M \Lambda d\xi \geqslant M^*$, то

$$\int_0^M \frac{\Lambda^2}{pp_1} d\xi \cdot \int_0^M pp_1 d\xi \geqslant \left(\int_0^M \Lambda d\xi\right)^2 \geqslant M^{*\,2},$$

поэтому

$$M^* \geqslant \int_0^1 d\eta \int_0^M \frac{\Lambda^2}{pp_1}\, d\xi \geqslant M^{*\,2} \int_0^1 \frac{d\eta}{\int_0^M pp_1 d\xi},$$

значит

$$M^* \leqslant \frac{1}{\int_0^1 \frac{d\eta}{\int_0^M pp_1 d\xi}} \leqslant \frac{\int_0^1 \left(\int_0^M pp_1 d\xi\right) d\eta}{\int_0^1 \frac{d\eta}{\int_0^M pp_1 d\xi} \cdot \int_0^1 \left(\int_0^M pp_1 d\xi\right) d\eta} \leqslant \iint_{R_\zeta} pp_1 d\xi d\eta, \quad (4)$$

откуда

$$M^* - M = \iint_{R_\zeta} (pp_1 - 1)\, d\xi d\eta.$$

Из полученных оценок следует, что

$$|M^* - M| \leqslant \iint_{R_\zeta} (pp_1 - 1)\, d\xi d\eta,$$

то есть неравенства (2) и (1).

Докажем теперь следующую лемму о растяжении*:

Лемма 7. 3. *Пусть функция* $w=f(z)$ *производит Q-квазиконформное отображение области D на область Δ с характеристиками* α, β, γ; α_1, β_1, γ_1, *имеющими равномерно ограниченные внутри D интегралы*

$$I_\alpha(z_0)=\iint\limits_D \frac{|\alpha(z)-\alpha(z_0)|}{|z-z_0|^2}\,d\sigma_z,\ \ldots,\ I_{\gamma_1}(z_0);\ z_0\in D. \tag{5}$$

Тогда в точках дифференцируемости $f(z)$ *максимальное растяжение*

$$\Lambda_{w/z}(z)=\overline{\lim_{h\to 0}}\left|\frac{f(z+h)-f(z)}{h}\right| \tag{6}$$

и минимальное растяжение

$$\lambda_{w/z}(z)=\underline{\lim_{h\to 0}}\left|\frac{f(z+h)-f(z)}{h}\right| \tag{7}$$

для каждой области D_1, $D_1\subset D$ *ограничены сверху и снизу положительными постоянными, зависящими вообще от выбора* D_1.

Доказательство. Рассмотрим в области D_1, $D_1\subset D$ произвольную точку z_0 дифференцируемости $f(z)$ и отобразим области D и Δ сначала аффинно, с характеристиками $\alpha(z_0)$, $\beta(z_0)$, $\gamma(z_0)$, соответственно $\alpha_1(z_0)$, $\beta_1(z_0)$, $\gamma_1(z_0)$, а затем конформно соответственно на круги $|\zeta|<1$ и $|\omega|<1$ так, что $\zeta(z_0)=0$ и $\omega(w_0)=0$, где $w_0=f(z_0)$. Тогда мы получим квазиконформное $\omega=\chi(\zeta, z_0)$, $\chi(0, z_0)=0$ с непрерывными характеристиками и, в силу леммы 7. 1, равномерно ограниченными в преобразованной области D_1 интегралами**

$$I(z_0)=\iint\limits_{|\zeta|<1}\frac{p(\zeta, z_0)-1}{|\zeta|^2}\,d\sigma_\zeta,\ I_1(z_0)=\iint\limits_{|\zeta|<1}\frac{p_1(\zeta, z_0)-1}{|\zeta|^2}\,d\sigma_\zeta. \tag{8}$$

При этом отображение $\omega(\zeta)$ дифференцируемо в нуле и $p(0, z_0)=p_1(0,z_0)=1$

Чтобы оценить растяжение $\Lambda_{\omega/z}(z)$ в точке z_0 заметим, что

$$\Lambda_{w\,z}\leqslant\Lambda_{w\,\tau}\cdot\Lambda_{\tau\,\omega}\cdot\Lambda_{\omega\,\zeta}\cdot\Lambda_{\zeta/t}\cdot\Lambda_{t/z}, \tag{9}$$

* Лемма 7. 3. является усилением аналогичной леммы Б. В. Шабата ([2], стр. 204).

** Характеристики $\alpha_1(\zeta, z_0),\ldots$ отображения $\omega=\chi(\zeta, z_0)$ получаются путем преобразования характеристик $\alpha_1(w),\ldots$ при переходе от Δ к $|\omega|<1$. При переходе от D к $|\zeta|<1$ те же значения $p_1(\zeta, z_0)$ получаются для характеристик $\alpha_1^*(z),\ldots$, получаемых из $\alpha_1(z),\ldots$ аффинным преобразованием $l^*=l^{-1}(\tilde{l})$, где $l(z, z_0)$ и $\tilde{l}(w, w_0)$ указанные выше аффинные преобразования.

где $t = l(z, z_0)$ и $\tau = \tilde{l}(w, w_0)$ указанные выше аффинные отображения. Выбирая их в виде растяжения в $p(z_0)$, соответственно в $p_1(z_0)$ раз в направлении малых осей соответствующих эллипсов и обозначая через $d(z_0)$ и $d(t_0)$ расстояния от точек z_0 и $t_0 = l(z_0, z_0)$ соответственно до границ областей D и $D_t = l(D)$ и аналогично через $\delta(w_0)$ и $\delta(\tau_0)$ обозначая расстояния от точек w_0 и $\tau_0 = \tilde{l}(w_0, w_0)$ соответственно до границ области Δ и $\Delta_\tau = \tilde{l}(\Delta)$, будем иметь (см. приложение, 3. 4):

$$\left.\begin{aligned} &\Lambda_{w/\tau} \equiv 1, \quad \Lambda_{t/z} \equiv p(z_0), \\ &\Lambda_{\tau/w}(0) = |\tau'(0)| \leqslant 4\delta(\tau_0) < 4p_1(z_0)\,\delta(w_0), \\ &\Lambda_{\zeta/t}(0) = |\zeta'(t_0)| \leqslant \frac{1}{d(t_0)} \leqslant \frac{1}{d(z_0)}, \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

откуда следует, что

$$\Lambda_{w/z}(z_0) \leqslant \frac{4p(z_0)\,p_1(z_0)\,\delta(w_0)}{d(z_0)}\,\Lambda_{\omega/\zeta}(0) \tag{11}$$

или

$$\Lambda_{w/z}(z_0) < \mathrm{const}\ \Lambda_{\omega/\zeta}(0), \tag{12}$$

где постоянная зависит от выбора D_1.

Аналогично для минимального растяжения имеем

$$\lambda_{w/z} \geqslant \lambda_{w/\tau} \cdot \lambda_{\tau/\omega} \cdot \lambda_{\omega/\zeta} \cdot \lambda_{\zeta/t} \cdot \lambda_{t/z}, \tag{13}$$

$$\left.\begin{aligned} &\lambda_{w/\tau} \equiv \frac{1}{p_1(z_0)}, \quad \lambda_{t/z} \equiv 1, \\ &\lambda_{\tau/\omega}(0) = |\tau'(0)| \geqslant \delta(\tau_0) \geqslant \delta(w_0), \\ &\lambda_{\zeta/t}(0) = |\zeta'(t_0)| \geqslant \frac{1}{4d(t_0)} \geqslant \frac{1}{4p(z_0)\,d(z_0)}, \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

следовательно,

$$\lambda_{w/z}(z_0) \geqslant \frac{\delta(w_0)}{4\,p(z_0)\,p_1(z_0)\,d(z_0)}\,\lambda_{\omega/\zeta}(0) > \mathrm{const}\,\lambda_{\omega/\zeta}(0). \tag{15}$$

Остается еще заметить, что функция $\omega(\zeta) = \chi(\zeta, z_0)$ в точке $\zeta = 0$ удовлетворяет условиям теоремы 2. 6, поэтому она там моногенна и, следовательно, $\Lambda_{\omega/\zeta}(0) = \Lambda_{\omega/\zeta}(0) = |\omega'(0)|$.

Таким образом, имеем соотношения

$$\left.\begin{aligned} &\Lambda_{w/z}(z_0) < \mathrm{const}\,|\omega'(0)|, \\ &\lambda_{w/z}(z_0) > \mathrm{const}\,|\omega'(0)|, \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

и все сводится к оценке $|\omega'(0)|$.

Так как при отображении $\omega(\zeta)$ бесконечно малый круг $|\zeta| < r$ переходит в бесконечно малый круг с центром в $\omega = 0$, то образ γ_r окружности $|\zeta| = r$ можно заключить в кольцо $\rho' < |\omega| < \rho''$, $\lim\limits_{r \to 0} \frac{\rho''}{\rho'} = 1$. Отсюда следует, что

$$\lim_{r \to 0} \frac{\rho'}{r} = \lim_{r \to 0} \frac{\rho''}{r} = \lim_{\zeta \to 0} \left| \frac{\omega(\zeta)}{\zeta} \right| = |\omega'(0)|. \tag{17}$$

Заметив это, отобразим конформно двусвязную область, заключенную между $|\omega| = 1$ и γ_r, на кольцо $\rho < |з| < 1$ в плоскости з. Тогда $\rho' \leqslant \rho \leqslant \rho''$ (см. приложение, 3. 4)и, в силу (17),

$$\lim_{r \to 0} \frac{\rho}{r} = |\omega'(0)|. \tag{18}$$

Полученное таким образом квазиконформное отображение $з = з(\zeta, z_0)$ кольца $r < |\zeta| < 1$ на кольцо $\rho < |з| < 1$ удовлетворяет условиям леммы 7. 2. В самом деле, конформный переход от ω к з не изменяет характеристик $p(\zeta, z_0)$ и $p_1(\zeta, z_0)$ в кольце $r < |\zeta| < 1$, кроме того, так как очевидно

$$pp_1 - 1 < p_1(p-1) + p(p_1 - 1) \leqslant Q[(p-1) + (p_1 - 1)],$$

то

$$\iint\limits_{r < |\zeta| < 1} \frac{pp_1 - 1}{|\zeta|^2}\, d\sigma_\zeta < Q \iint\limits_{r < |\zeta| < 1} \frac{(p-1)+(p_1-1)}{|\zeta|^2}\, d\sigma_\zeta < Q[I(z_0) + I_1(z_0)].$$

На основании леммы 7. 2 имеем

$$\left| \ln \frac{\rho}{r} \right| \leqslant \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{z < |\zeta| < 1} \frac{pp_1 - 1}{|\zeta|^2}\, d\sigma_\zeta < \frac{Q}{2\pi} [\, I(z_0) + I_1(z_0)\,],$$

откуда, совершая предельный переход $r \to 0$ и учитывая (18), получаем неравенство

$$|\ln|\omega'(0)|| < \frac{Q}{2\pi} [\, I(z_0) + I_1(z_0)\,],$$

следовательно

$$e^{-\frac{Q}{2\pi}[I(z_0) + I_1(z_0)]} < |\omega'(0)| < e^{\frac{Q}{2\pi}[I(z_0) + I_1(z_0)]} \tag{19}$$

что вместе с (16) завершает доказательство леммы 7. 3.

7. 3. Дифференциальные свойства квазиконформных отображений. Пусть функция $f(z) = u + iv$ производит квазиконформное отображение области D на область Δ с характеристиками $\alpha, \beta, \gamma; \alpha_1, \beta_1, \gamma_1$. Тогда u, v является обобщенным решением системы

$$\alpha u_x+(\beta+\beta_1)u_y=\alpha_1 v_y,\ (\beta-\beta_1)u_x+\gamma u_y=-\alpha_1 v_x, \tag{1}$$

и поэтому здесь применимы теоремы 6.1 — 6.3, которые, в соединении с леммой 7.3 о растяжении, приводят к следующим теоремам.

Теорема 7.1. *Если характеристики α, β, γ; α_1, β_1, γ_1 квазиконформного отображения $f(z)=u+iv$ области D имеют внутри D равномерно ограниченные интегралы*

$$I_\alpha(z_0)=\iint\limits_D \frac{|\alpha(z)-\alpha(z_0)|}{|z-z_0|^2}\,d\sigma_z,\ldots, I_{\gamma_1}(z_0);\quad z_0\in D, \tag{2}$$

то функции u, v дифференцируемы всюду в D и якобиан $I_{w/z}$ ограничен сверху и снизу положительными постоянными равномерно внутри D. В точках равномерной сходимости интегралов (2) частные производные u_x, u_y, v_x, v_y непрерывны.

Доказательство. В самом деле, по лемме 7.3 в точках дифференцируемости $f(z)$ максимальное и минимальное растяжения $\Lambda(z)$ и $\lambda(z)$ внутри D равномерно ограничены сверху и снизу положительными постоянными. Отсюда следует, что частные производные u_x, u_y, v_x, v_y почти всюду внутри D равномерно ограничены, поэтому сюда применима теорема 6.1, из которой следует дифференцируемость u, v всюду в D и непрерывная дифференцируемость в точках равномерной сходимости интегралов (2).

Утверждение о якобиане следует из неравенства

$$\frac{\lambda^2}{pp_1}\leqslant\frac{\Lambda^2}{pp_1}\leqslant J\leqslant\Lambda^2. \tag{3}$$

Теорема 7.2. *Если характеристики α, β, γ; $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ квазиконформного отображения $f(z)=u+iv$ области D удовлетворяют в D условию Гельдера с показателем δ $(0<\delta\leqslant 1)$, то частные производные u_x, u_y, v_x, v_y удовлетворяют внутри D условию Гельдера с тем же показателем δ, испорченном на логарифм, если $\delta=1$.*

Теорема 7.3. *Если в окрестности точки $z_0\in D$ характеристики α, β, γ; α_1, β_1, γ_1 квазиконформного отображения $f(z)=u+iv$ непрерывно дифференцируемы и частные их производные удовлетворяют в точке z_0 интегральному условию Гельдера, то функции u, v дважды дифференцируемы в точке z_0, притом непрерывно, если указанное условие Гельдера имеет место не только в точке z_0, но и всюду вблизи нее и в точке z_0 соответствующие интегралы сходятся равномерно.*

Доказательство двух последних теорем аналогично доказательству теоремы 7.1.

В заключение приведем следующую теорему П. П. Белинского [21] о дифференцируемости квазиконформного отображения в изолированной особой точке:

Пусть функция $f(z)$ производит квазиконформное отображение области D с выкинутой точкой z_0 и интегралы

$$I = \iint\limits_D \frac{p(z)-1}{|z-z_0|^2}\, d\delta_z, \quad I_1 = \iint\limits_D \frac{p_1(z)-1}{|z-z_0|^2}\, d\delta_z \tag{4}$$

сходятся. Тогда существует предел $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$, *функция* $f(z)$ *моногенна в точке* z_0 и $f'(z_0) \neq 0$.

Эта теорема существенно дополняет теорему Тайхмюллера-Виттиха [22, 23], в которой при тех же по существу условиях утверждается лишь существование конечного отличного от нуля предела $\lim\limits_{z \to z_0} \left| \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} \right|$. Теорема П. П. Белинского приводит к соответствующему усилению теоремы 7. 1.

§ 8. КВАЗИКОНФОРМНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ КЛАССА C_1*.

8. 1. Равностепенная непрерывность и компактность Q-квазиконформных отображений.

Введем следующее определение:

Определение 8. 1. *Квазиконформное отображение* $w = f(z) = u + iv$ *области* D *называется квазиконформным отображением класса* C_1, *если оно однолистно, функции* u, v *непрерывно дифференцируемы в* D, *с возможным разрывом первого рода на конечном числе гладких дуг, и якобиан* $J = u_x v_y - u_y v_x$ *отличен от нуля всюду в* D. *Если* $p \leqslant Q$, *то отображение* $f(z)$ *называется* Q*-квазиконформным отображением класса* C_1, *если же* $p \leqslant 1 + \varepsilon$, *то* — ε*-квазиконформным отображением класса* C_1.

Из данного определения следует, что отображение $z = \varphi(w)$ также является квазиконформным отображением класса C_1, соответственно Q-квазиконформным и ε-квазиконформным.

Докажем сначала две леммы ([1], леммы 1 и 2).

---

* Излагаемые в этом параграфе результаты взяты из работы М. А. Лаврентьева [1], где они являются вспомогательными при доказательстве основной теоремы о существовании квазиконформных отображений, приводимой ниже (см. § 9). Однако, эти же результаты имеют и самостоятельное значение, поэтому мы их выделили в отдельный параграф. Изложение у нас более подробное, чем в [1].

Лемма 8.1. Пусть функция $w=f(z)$ производит Q-квазиконформное отображение класса C_1 круга $|z|\leqslant 1$ на круг $|w|\leqslant 1$ и $f(0)=0$. Тогда

$$e^{-\frac{\pi^2 Q}{2|z|^2}}<|f(z)|<\pi\sqrt{\frac{Q}{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{\ln\frac{1}{|z|}}}. \qquad (1)$$

Доказательство. Пусть $z=re^{i\varphi}$, $z_0\neq 0$ — фиксированная точка круга $|z|<1$ и $\Lambda(z)=\overline{\lim\limits_{h\to 0}}\left|\frac{f(z+h)-f(z)}{h}\right|$. Тогда, оценивая площадь образа кольца $r_0<|z|<1$, имеем:

$$\pi>\int\limits_{r_0}^{1}\int\limits_{0}^{2\pi} Jrdrd\varphi\geqslant\int\limits_{r_0}^{1}\int\limits_{0}^{2\pi}\frac{\Lambda^2}{p}\,rdrd\varphi$$

и, если $l(r)$ длина образа окружности $|z|=r$,

$$\int\limits_{0}^{2\pi}\Lambda r\,d\varphi\geqslant l(r)>2|f(z_0)|,$$

то, по неравенству Буняковского,

$$\int\limits_{0}^{2\pi}\frac{\Lambda^2}{p}\,rd\varphi\cdot\int\limits_{0}^{2\pi} prd\varphi\geqslant\left(\int\limits_{0}^{2\pi}\Lambda\,rd\varphi\right)^2>4|f(z_0)|^2,$$

учитывая же, что $p\leqslant Q$, имеем

$$\int\limits_{0}^{2\pi}\frac{\Lambda^2}{p}\,rd\varphi>\frac{2|f(z_0)|^2}{\pi Qr}.$$

Следовательно,

$$\pi>\frac{2|f(z_0)|^2}{\pi Q}\int\limits_{r_0}^{1}\frac{dr}{r}=\frac{2|f(z_0)|^2}{\pi Q}\ln\frac{1}{r_0},$$

откуда

$$|f(z_0)|<\pi\sqrt{\frac{Q}{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{\ln\frac{1}{|z|}}}.$$

Если $z=\varphi(w)$ обратное отображение и $w_0=f(z_0)$, то, в силу доказанного,

$$|z_0|=|\varphi(w_0)|<\pi\sqrt{\frac{Q}{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{\ln\frac{1}{|w_0|}}},$$

откуда следует левая часть (1).

Лемма 8.2. В условиях леммы 8.1 существует такая постоянная K, зависящая только от Q, что для любых двух точек z_1, z_2 круга $|z| \leqslant 1$ имеет место неравенство

$$e^{-\frac{K^2}{|z_2-z_1|^2}} < |f(z_2)-f(z_1)| < R \cdot \frac{1}{\sqrt{\ln\frac{1}{|z_2-z_1|}}}. \tag{2}$$

Доказательство. Пусть z_1, z_2 две произвольные точки круга $|z| \leqslant 1$ и $w_1 = f(z_1)$, $w_2 = f(z_2)$. Чтобы доказать неравенство (2) естественно отобразить конформно круги $|z| < 1$ и $|w| < 1$ самих на себя так, чтобы точки z_1 и w_1 перешли в начало, и применить неравенство (1). Однако при этом в (2) коэффициенты будут неограниченно расти с приближением z_1 или z_2 к окружности $|z| = 1$.

Чтобы избежать этого, М. А. Лаврентьев поступает следующим образом: он продолжает $f(z)$ за единичный круг по принципу симметрии, полагая для $|z| > 1$

$$f(z) = \frac{1}{\overline{f}\left(\frac{1}{\overline{z}}\right)}$$

и затем отображает конформно круг $|z| < \frac{1}{r_0}$ $(0 < r_0 < 1)$ и соответствующую ему область D на единичные круги $|\zeta| < 1$, соответственно $|\omega| < 1$ так, что $\zeta(z_1) = 0$ и $\omega(w_1) = 0$. Применяя затем (1) к полученному квазиконформному отображению $\omega = \omega(\zeta)$ и возвращаясь к прежним переменным, он получает (3).

Проделаем расчет. Имеем

$$\zeta(z) = \frac{r_0(z-z_0)}{1-r_0^2\overline{z}_1 z},$$

откуда

$$|\zeta_2| = |\zeta(z_2)| < \frac{r_0}{1-r_0^2}|z_2-z_1| < |z_2-z_1|,$$

если r_0 достаточно мало. Выбирая еще r_0 так, чтобы область D содержала круг $|w| < 2$, для чего, учитывая правую часть (1), достаточно взять $r_0 < e^{-2\pi^2 Q}$, и отображая конформно круг $|w| < 2$ на единичный круг $|\tilde{\omega}| < 1$, $\tilde{\omega}(w_1) = 0$, будем иметь

$$\tilde{\omega}(w) = \frac{2(w-w_1)}{4-\overline{w}_1 w},$$

откуда

$$|\tilde{\omega}_2| = |\tilde{\omega}(w_2)| > \frac{2}{5}|w_2-w_1|,$$

следовательно и

$$|\omega_2| = |\omega(w_2)| > \frac{2}{5}|w_2 - w_1|,$$

ибо, в силу принципа Линделёфа (см. приложение, 3. 1), $|\omega| \geqslant |\tilde{\omega}|$. С другой стороны, в силу (1),

$$|\omega_2| < \pi \sqrt{\frac{Q}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\ln \frac{1}{|\zeta_2|}}},$$

откуда, учитывая полученные неравенства, имеем

$$|w_2 - w_1| < \frac{K}{\sqrt{\ln \frac{1}{|z_2 - z_1|}}},$$

где $K = \frac{5\pi}{2}\sqrt{\frac{Q}{2}}$. Таким образом, доказана правая часть (2); применяя ее к обратной функции $z = \varphi(w)$, получим левую часть (2).

Как следствие из леммы 8. 2 получаем следующую теорему:

Теорема 8. 1. *Семейство Q-квазиконформных отображений $\{f(z)\}$ класса C_1, круга $|z| \leqslant 1$ на круг $|w| \leqslant 1$ с нормировкой $f(0) = 0$ компактно в том смысле, что из всякой бесконечной последовательности таких функций $\{f_n(z)\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ можно выбрать подпоследовательность $\{f_{n_k}(z)\}$ $(k = 1, 2, \ldots)$, равномерно сходящуюся в круге $|z| \leqslant 1$ к функции $f(z)$, $f(0)=0$, гомеоформно отображающей этот круг на круг $|w| \leqslant 1$. При этом обратные к $f_{n_k}(z)$ функции $\varphi_{n_k}(w)$ сходятся равномерно в круге $|w| \leqslant 1$ к функции $\varphi(w)$, обратной к $f(z)$.*

Доказательство. Из правой части (2) следует равностепенная непрерывность последовательности $\{f_n(z)\}$ в круге $|z| \leqslant 1$, откуда, по теореме Арцела (см. приложение, 3. 2), следует возможность выбора подпоследовательности $\{f_{n_k}(z)\}$, равномерно сходящейся в круге $|z| \leqslant 1$. Из левой части (2) следует, что предельная функция $f(z)$ однолистна в круге $|z| \leqslant 1$, следовательно (см. выше, начало 2. 2) она осуществляет гомеоморфное отображение круга $|z| \leqslant 1$ на круг $|w| \leqslant 1$. Пусть $w = f(z)$, $z = \varphi(w)$ и $w_{n_k} = f_{n_k}(z)$, $z = \varphi_{n_k}(w_{n_k})$. Тогда, по доказанному, $(w_{n_k} - w) \rightarrow 0$* и разность $\varphi_{n_k}(w) - \varphi(w) = \varphi_{n_k}(w) - \varphi_{n_k}(w_{n_k})$, в силу правой части (1), примененной к последовательности $\{\varphi_{n_k}(w)\}$, равномерно стремится к нулю во всем круге $|w| \leqslant 1$, что доказывает последнюю часть теоремы 8. 1.

* Знак $\rightarrow$ означает равномерную сходимость.

Примечание. Опираясь на теорему 8, 1 читатель легко докажет, что в условиях леммы 8. 1 существуют такие две функции $\lambda_1(Q, r)$ и $\lambda_2(Q, r)$, монотонно возрастающие вместе с r от 0 до 1, что

$$\lambda_1(Q, |z|) \leq |f(z)| \leq \lambda_2(Q, |z|). \tag{4}$$

Доказательство ведется от противного. Можно, однако, и точно указать λ_1, λ_2, решая соответствующую экстремальную задачу, то есть находя отображение, которое в условиях леммы дает максимальное, соответственно минимальное значение модуля $|f(z)|$. Решение этой задачи позволяет также усилить лемму 8. 2, именно, вместо (2) можно доказать, что

$$K_1 |z_2 - z_1|^Q < |f(z_2) - f(z_1)| < K_2 |z_2 - z_1|^{\frac{1}{Q}}, \tag{5}$$

где K_1 и K_2 абсолютные постоянные (см. [24], [25]). Соответствующая экстремальная задача для этого общего случая еще не решена.

8. 2. Близость ε-квазиконформных отображений к конформным отображениям. Докажем следующую лемму:

Лемма 8. 3. *Пусть функция $w = f(z) = u + iv$ производит ε-квазиконформное отображение класса C_1 круга $|z| < 1$ на круг $|w| < 1$. Тогда для любого простого спрямляемого замкнутого контура Γ, лежащего в круге $|z| < 1$, интеграл*

$$\left| \int_\Gamma f(z)\, dz \right| < 4\pi\varepsilon. \tag{1}$$

Доказательство. Пусть сначала Γ простой замкнутый многоугольный контур, лежащий в круге $|z| < 1$. Налагая на этот круг квадратную сетку со стороны η, подлежащей определению в дальнейшем, разобьем область D, ограниченную Γ, на конечное число областей $\{D_n\}$, тогда

$$\int_\Gamma f(z)\, dz = \sum_{(n)} \int_{D_n} f(z)\, dz.$$

Области $\{D_n\}$ разобьем на два класса: к первому отнесем те, которые внутри или на границе имеют общие точки с Γ или с теми гладкими дугами, на которых частные производные от u, v терпят разрыв 1-го рода; эти области будем обозначать через Q_i'; ко второму классу отнесем остальные области (квадраты) и будем их обозначать через Q_j''. Тогда

$$\int_\Gamma f(z)\, dz = \sum_{(i)} \int_{Q_i'} f(z)\, dz + \sum_{(j)} \int_{Q_j''} f(z)\, dz \tag{2}$$

Если L совокупная длина Γ и указанных выше дуг, то сумма периметров областей $\{Q_i'\}$ не превосходит $K(L+1)$, где K абсолютная постоянная, не зависящая от η. Установив это, зададимся произвольно малым числом $\delta > 0$ и подберем η так, чтобы в области $\overline{D}$ величина $|f(z+h)-f(z)| < \frac{\delta}{K(L+1)}$ для $|h| < \eta\sqrt{2}$. Фиксируя в областях Q_i' точки $z_i' \in \overline{D}$ и, замечая, что

$$\int_{Q_i'} f(z)dz = \int_{Q_i'} [f(z)-f(z_i')]dz,$$

получим

$$\left|\sum_{(i)} \int_{Q_i'} f(z)\, dz\right| \leqslant \sum_{(i)} \int_{Q_i'} |f(z) - f(z_i)|\,|dz| <$$
$$< \frac{\delta}{K(L+1)} \sum_{(i)} \int_{Q_i'} |dz| < \delta. \tag{3}$$

Квадраты $\{Q_j''\}$ разобьем на более мелкие квадраты $\{Q_s\}$ со стороной η_1, подлежащей определению в дальнейшем. Тогда

$$\sum_{(j)} \int_{Q_j''} f(z)\, dz = \sum_{(s)} \int_{Q_s} f(z)\, dz =$$
$$= \sum_{(s)} \int_{Q_s} [f(z)-f(z_s)]\, dz, \tag{4}$$

где z_s центр квадрата Q_s. Так как функции u, v непрерывно дифференцируемы в замкнутой области $\sum\limits_{(j)} Q_j''$, вообще не связной, то для любого $\varepsilon_1 > 0$ найдется такое малое η_1, что для $z \in Q_s$ будем иметь

$$f(z)-f(z_s) = l(z, z_s) + \vartheta_1(z, z_s)(z - z_s),$$

где

$$l(z, z_s) = \frac{\partial f(z_s)}{\partial x}(x - x_s) + \frac{\partial f(z_s)}{\partial y}(y - y_s)$$

и

$$|\vartheta_1(z, z_s)| < \varepsilon_1.$$

Пусть теперь

$$\Lambda_s = \overline{\lim_{h\to 0}} \left| \frac{f(z_s+h)-f(z_s)}{h} \right|.$$

При аффинном преобразовании $l(z, z_s)$ (напомним, что при отображениях класса C_1 якобиан отличен от нуля) круг с центром в точке z_s преобразуется в эллипс с центром в нуле и характеристикой $p = \frac{a}{b} \leqslant 1+\varepsilon$. Но такое отображение можно получить из целого линейного преобразования вида $l_1(z, z_s) = \Lambda_s e^{i\alpha_s}(z - z_s)$ и последующего сжатия в направлении малой оси в p раз. Поэтому, представляя $l(z, z_s)$ в виде

$$l(z, z_s) = l_1(z, z_s)\left[1 + \frac{l(z, z_s) - l_1(z, z_s)}{l_1(z, z_s)}\right]$$

и, замечая, что

$$\left| \frac{l(z, z_s) - l_1(z, z_s)}{l_1(z, z_s)} \right| \leqslant \frac{a-b}{a} \leqslant \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon},$$

имеем

$$l(z, z_s) = \Lambda_s l^{i\alpha_s}(z - z_s)[1 + \vartheta(z, z_s)], \quad |\vartheta(z, z_s)| \leqslant \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}.$$

Следовательно,

$$f(z) - f(z_s) = \Lambda_s e^{i\alpha_s}(z - z_s)(1+\vartheta) + \vartheta_1(z - z_s)$$

и из (4) следует, что

$$\left| \sum_{(s)} \int_{Q_s} f(z)\,dz \right| < \frac{4\varepsilon}{1+\varepsilon} \sum_{(s)} \Lambda_s \eta_1^2 + 4\varepsilon_1 \sum_{(s)} \eta_1^2, \tag{5}$$

ибо

$$\int_{Q_s} (z - z_s)\,dz = 0, \quad \int_{Q_s} |z - z_s|\,|dz| < 4\eta_1^2.$$

Вторая сумма в (5) — суммирование по s означает, что η_1^2 повторяется столько раз, сколько имеется квадратов Q_s — очевидно не превосходит площади круга $|z| < 1$, то есть π. Что касается первой суммы, то, используя соотношение $\Lambda_s^2 = pJ(z_s)$ и неравенство Коши, получаем

$$\sum_{(s)} \Lambda_s \eta_1^2 \leqslant \sqrt{\sum_{(s)} \Lambda_s^2 \eta_1^2 \sum_{(s)} \eta_1^2} < \sqrt{\pi(1+\varepsilon)\sum_{(s)} J(z_s)\eta_1^2}.$$

Но последняя сумма при малых η_1 примерно равна площади области $\sum_{(s)} f(Q_s)$, поэтому она не превосходит π, следовательно $\sum_s \Lambda_s \eta_1^2 < \pi\sqrt{1+\varepsilon}$ и, в целом,

$$\left|\sum_{(s)}\int_{Q_s} f(z)\,dz\right| < \frac{4\pi\varepsilon}{\sqrt{1+\varepsilon}} + 4\pi\varepsilon_1. \tag{6}$$

Из (2), (3) и (6) следует, что

$$\left|\int_{\Gamma} f(z)dz\right| < \delta + \frac{4\pi\varepsilon}{\sqrt{1+\varepsilon}} + 4\pi\varepsilon_1, \tag{7}$$

и, так как δ и ε_1 сколь угодно малы, то

$$\left|\int_{\Gamma} f(z)dz\right| \leqslant \frac{4\pi\varepsilon}{\sqrt{1+\varepsilon}}. \tag{8}$$

Если теперь Γ произвольный простой спрямляемый контур, то, приближая Γ ломаными и используя (8), получаем (1).

Примечание. Приведенное доказательство леммы 8.3 остается в силе, если Γ состоит из конечного числа простых спрямляемых контуров, расположенных в круге $|z| < 1$ попарно вне друг друга. Это дало основание П. П. Белинскому сделать следующее полезное для дальнейшего замечание (см. доказательство теоремы 9. 4): *лемма 8. 3 остается в силе, если $f(z)$ производит Q-квазиконформное отображение класса C_1 попарно взаимно простых односвязных областей $G_1, \ldots, G_n$, расположенных в круге $|z| < 1$, соответственно на попарно взаимно простые односвязные области $G_1', \ldots, G_n'$, расположенные в круге $|w| < 1$ и контур Γ состоит из произвольного числа простых спрямляемых контуров, расположенных попарно вне друг друга в областях $G_1, \ldots, G_n$.*

Докажем теперь следующую теорему:

Теорема 8. 2. *Существует такая функция $\lambda(\varepsilon) \to 0$ вместе с ε, что для любой функции $f(z)$, осуществляющей ε-квазиконформное отображение класса C_1 круга $|z| \leqslant 1$ на круг $|w| \leqslant 1$ с нормировкой $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, имеем неравенство*

$$|f(z) - z| < \lambda(\varepsilon). \tag{9}$$

Доказательство. Допуская противное, получаем для некоторого $\lambda_0 > 0$ последовательности $\varepsilon_n \to 0$, ε_n-квазиконформные отображения $f_n(z)$ класса C_1 круга $|z| \leqslant 1$ на круг $|w| \leqslant 1$ с нормировкой $f_n(0) = 0$, $f_n(1) = 1$ и $\{z_n\}$ такие, что

$$|f_n(z_n) - z_n| \geqslant \lambda_0 \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{10}$$

Тогда, по теореме 8. 1, можно выбрать подпоследовальность $\{f_{n_k}\}$, равномерно сходящуюся в круге $|z| \leqslant 1$ к некоторой функции $f(z)$, $f(0)=0$, $f(1)=1$, причем можно считать, что $z_{n_k} \to z_0$. Так как

$$|f(z_0)-z_0| = \lim_{k\to\infty} |[f(z_0)-f_{n_k}(z_0)] + [f_{n_k}(z_0) - f_{n_k}(z_{n_k})] + \\ + [f_{n_k}(z_{n_k}) - z_{n_k}] + [z_{n_k} - z_0]|$$

и все квадратные скобки справа, кроме третьей, сходятся к нулю, причем вторая скобка сходится к нулю равномерно (по n_k) в силу равностепенной непрерывности последовательности $\{f_{n_k}(z)\}$, то, применив (10), имеем

$$|f(z_0) - z_0| \geqslant \lambda_0. \tag{11}$$

С другой стороны, $f(z)$ непрерывна в круге $|z| \leqslant 1$ и, так как по лемме 8. 3 $|\int\limits_\Gamma f_n(z)dz| < 4\pi\varepsilon_n$, то $\int\limits_\Gamma f(z)dz = 0$, поэтому $f(z)$ конформно отображает круг $|z| < 1$ на круг $|w| < 1$, следовательно $f(z) = z$, ибо $f(0)=0$ и $f(1)=1$, что приводит к противоречию с (11).

Примечание: Можно показать (см. [25]), что $\lambda(\varepsilon)$ имеет порядок ε и во всяком случае не превышает 20ε. Точная оценка пока не найдена.

Как следствие получаем следующую теорему:

Теорема 8.3. *Пусть функция $w=f(z)$ производит ε-квазиконформное отображение класса C_1 круга $|z|\leqslant 1$ на замкнутую жорданову область D и пусть функция $w=F(z)$ производит конформное отображение* $|z|<1$ на D, причем $F(0)=f(0)=w_0$ и $F(1)=f(1)=w_1$. *Тогда существует такая функция $\lambda(\varepsilon, r, d)$, $\varepsilon>0$, $0\leqslant r<1$, $d>0$, которая, монотонно убывая, стремится к нулю вместе с ε, что*

$$|f(z) - F(z)| < \lambda(\varepsilon, r, d_0), \tag{12}$$

коль скоро $|z|\leqslant r$ и расстояние от точки w_0 до границы области D равно d_0.

Доказательство. Функция $\omega(z) = F^{-1}[f(z)]$ удовлетворяет условиям теоремы 8. 2, следовательно $|\omega(z) - z| < \lambda(\varepsilon)$, где $\lambda(\varepsilon)$ указанная там функция, зависящая только от ε. С другой стороны, $|\omega(z)| < \lambda_2(1+\varepsilon, |z|)$, где λ_2 указанная в 8. 1 (4) функция и $f(z) - F(z) = F(\omega) - F(z)$, ибо $F[\omega(z)] = f(z)$. Но, по известным теоремам от искажений при однолистных конформных отображениях (см. приложение, 3. 4 (10)), имеем

$$|F(\omega) - F(z)| < |\omega - z| K(r^*, d_0),$$

где K зависит только от r^*, если $|z|, |\omega| \leqslant r^*$ и от расстояния d_0 от w_0 до границы области D. Но $r^* \leqslant \lambda_2(1+\varepsilon, |z|)$, поэтому $|f(z) - F(z)| < \lambda(\varepsilon) K[\lambda_2(1+\varepsilon, |z|), d_0]$, откуда следует (12).

Примечание. Если бы вместо 8.1 (4) мы воспользовались 8.1 (1), то соотношение (12) при данном r было бы нами доказано только для достаточно малых r, именно для таких, при которых для $|\omega(z)|$ получалась бы оценка сверху меньшая единицы.

8.3. Искажение колец при ε-квазиконформных отображениях. Докажем следующую лемму:

Лемма 8.4. Пусть функция $w=f(z)$ производит ε-квазиконформное отображение класса C_1 круга $|z|\leqslant 1$ на круг $|w|\leqslant 1$ и $f(0)=0$. Тогда при произвольном выборе точки $z^{(0)}$ в круге $|z|<1$ и точек $z^{(1)}, z^{(2)}$ в кольце

$$(1-\varepsilon')\rho \leqslant |z-z^{(0)}| \leqslant \rho, \tag{1}$$

где $0<\rho\leqslant 1-|z^{(0)}|$ и $0\leqslant \varepsilon'<1$, имеют место неравенства

$$\left|\frac{f(z^{(1)})-f(z^{(0)})}{f(z^{(2)})-f(z^{(0)})}\right| < 1+\eta(\varepsilon,\varepsilon'), \tag{2}$$

$$\left|\arg\frac{f(z^{(1)})-f(z^{(0)})}{f(z^{(2)})-f(z^{(0)})} - \arg\frac{z^{(1)}-z^{(0)}}{z^{(2)}-z^{(0)}}\right| < \eta(\varepsilon,\varepsilon'), \tag{3}$$

где $\eta(\varepsilon,\varepsilon')$ зависит только от $\varepsilon, \varepsilon'$ и $\lim\limits_{\varepsilon,\varepsilon'\to 0}\eta(\varepsilon,\varepsilon')=0$.

Доказательство. Допустим, что лемма не верна. Тогда можно указать такое число $\eta_0>0$ и такую последовательность ε_n-квазиконформных отображений $f_n(z)$, удовлетворяющих условиям леммы и $\varepsilon_n\to 0$, что для некоторых точек $\{z_n^{(0)}\}$ круга $|z|<1$ и точек $\{z_n^{(1)}, z_n^{(2)}\}$ колец

$$(1-\varepsilon_n')\rho_n \leqslant |z-z_n^{(0)}| \leqslant \rho_n, \tag{4}$$

где $\varepsilon_n'\to 0$ и $0<\rho_n\leqslant 1-|z_n^{(0)}|$, выполняется, по крайней мере, одно из неравенств:

$$\left|\frac{f_n(z_n^{(1)})-f_n(z_n^{(0)})}{f_n(z_n^{(2)})-f_n(z_n^{(0)})}\right| \geqslant 1+\eta_0, \tag{5}$$

$$\left|\arg\frac{f_n(z_n^{(1)})-f_n(z_n^{(0)})}{f_n(z_n^{(2)})-f_n(z_n^{(0)})} - \arg\frac{z_n^{(1)}-z_n^{(0)}}{z_n^{(2)}-z_n^{(0)}}\right| \geqslant \eta_0. \tag{6}$$

Выбирая подпоследовательность индексов $\{n_k\}$ $(k=1, 2,\dots)$, можно добиться сходимости подпоследовательностей $\{z_{n_k}^{(0)}, z_{n_k}^{(1)}, z_{n_k}^{(2)}, \rho_{n_k}, f_{n_k}(z)\}$, причем сходимость $\{f_{n_k}(z)\}$ будет равномерная в круге $|z|\leqslant 1$ и предельная функция будет иметь вид $e^{i\alpha}z$. Чтобы не усложнять обозначений, будем считать, что такая сходимость уже имеет место с самого начала.

Если $\lim \rho_n>0$, то предельный переход в (5) или в (6) приводит к неравенствам, невозможным для предельной функции $e^{i\alpha}z$.

Поэтому $\lim \rho_n = 0$. Мы сейчас покажем, что в этом случае предположение доказательства от противного можно вести в предположении, что $z_n^{(0)} = 0$ и $w_n^{(0)} = f_n(z_n^{(0)}) = 0$. Для этого продолжим функции $\{f_n(z)\}$ по принципу симметрии так, как при доказательстве леммы 8. 2 и отобразим конформно круги $|z| < 2$ и соответствующие ему области $\{D_n\}$ в плоскости w на круги $|\mathfrak{z}_n| < 1$ и $|\omega_n| < 1$ так, что $\mathfrak{z}_n(z_n^{(0)}) = 0$ и $\omega_n(w_n^{(0)}) = 0$. Пусть $w_n^{(i)} = f_n(z_n^{(i)})$, $\mathfrak{z}_n^{(i)} = \mathfrak{z}_n(z_n^{(i)})$ и $\omega_n^{(i)} = \omega_n(w_n^{(i)})$ $(i = 1,2)$. Так как $\rho_n \to 0$, то $|z_n^{(i)} - z_n^{(0)}|$ и $|w_n^{(i)} - w_n^{(0)}| \to 0$, поэтому $\mathfrak{z}_n^{(i)}$ и $\omega_n^{(i)} \to 0$ и, на основании теорем об искажении при однолистных конформных отображениях (см. приложение, теорема 3. 5), отношения

$$\frac{\mathfrak{z}_n^{(i)}}{\mathfrak{z}_n^{(2)}} : \frac{z_n^{(1)} - z_n^{(0)}}{z_n^{(2)} - z_n^{(0)}}, \qquad \frac{\omega_n^{(1)}}{\omega_n^{(2)}} : \frac{w_n^{(1)} - w_n^{(0)}}{w_n^{(2)} - w_n^{(0)}}$$

стремятся 1. Отсюда следует, что $\mathfrak{z}_n^{(1)}$ и $\mathfrak{z}_n^{(2)}$ лежат в кольце

$$(1 - \tilde{\varepsilon}_n')\rho_n' \leqslant |\mathfrak{z}_n| < \rho_n', \tag{7}$$

где $\tilde{\varepsilon}_n' \to 0$ и $\rho_n' \to 0$, и неравенства (5), (6) принимают вид

$$\left| \frac{\omega_n^{(1)}}{\omega_n^{(2)}} \right| \geqslant 1 + \tilde{\eta}_0, \left| \arg \frac{\omega_n^{(1)}}{\omega_n^{(2)}} - \arg \frac{\mathfrak{z}_n^{(1)}}{\mathfrak{z}_n^{(2)}} \right| \geqslant \tilde{\eta}_0, \tag{8}$$

где $0 < \tilde{\eta}_0 \leqslant \eta_0$.

Таким образом, если $\rho_n \to 0$, то можно считать, что $z_n^{(0)} = 0$ и $w_n^{(0)} = 0$. Тогда точки $z_n^{(1)}$, $z_n^{(2)}$ лежат в кольце

$$(1 - \varepsilon_n')\rho_n \leqslant |z| \leqslant \rho_n \tag{9}$$

и необходимо показать, что допущение любого из неравенств

$$\left| \frac{w_n^{(1)}}{w_n^{(2)}} \right| \geqslant 1 + \eta_0, \left| \arg \frac{w_n^{(1)}}{w_n^{(2)}} - \arg \frac{z_n^{(1)}}{z_n^{(2)}} \right| \geqslant \eta_0, \tag{10}$$

где $\eta_0 > 0$, ведет к противоречию.

Подберем $m_0 > 1$ и $\varepsilon_0 > 0$ так, чтобы при любом однолистном конформном отображении $\varphi(\mathfrak{z})$ круга $|\mathfrak{z}| < 1$ с $\varphi(0) = 0$ для всяких двух точек $\mathfrak{z}_1$, $\mathfrak{z}_2$ кольца

$$(1 - \varepsilon') \frac{1}{m} \leqslant |z| \leqslant \frac{1}{m}, \tag{11}$$

где $0 < \varepsilon' \leqslant \varepsilon_0$, $m \geqslant m_0$, выполнялись неравенства

$$\left|\frac{\varphi(з_1)}{\varphi(з_2)}\right| < 1 + \frac{\eta_0}{2}, \quad \left|\arg\frac{\varphi(з_1)}{\varphi(з_2)} - \arg\frac{з_1}{з_2}\right| < \frac{\eta_0}{2} \tag{12}$$

(см. приложение, теорема 3. 6). Затем подберем такое $n_0 > 0$, чтобы $\varepsilon_n' \leqslant \varepsilon_0$ и $m_0\rho_n = \rho_n' < 1$ для всех $n \geqslant n_0$. Тогда функция

$$з(z) = \frac{z}{\rho_n'} \tag{13}$$

отображает круг $|z| < \rho_n'$ на круг $|з| < 1$, причем кольцо (9) переходит в кольцо

$$(1-\varepsilon_n')\frac{1}{m_0} \leqslant |з| \leqslant \frac{1}{m_0}. \tag{14}$$

Пусть D_n область, на которую функция $f_n(z)$ отображает круг $|z| < \rho_n'$ и d_n — расстояние от $f_n(0) = 0$ до границы области D_n. Тогда функция

$$F_n(з) = \frac{1}{d_n} f_n(з\rho_n') \tag{15}$$

отображает ε_n-*квазиконформно* круг $|з| < 1$ на *область* D_n^*, подобную D_n и с границей, отстоящей от начала координат на расстояние равное 1. При этом неравенства (10) принимают вид

$$\left|\frac{F_n'\left(з_n^{(1)}\right)}{F_n\left(з_u^{(2)}\right)}\right| \geqslant 1 + \eta_0, \left|\arg\frac{F_n\left(з_n^{(1)}\right)}{F_n\left(з_n^{(2)}\right)} - \arg\frac{з_n^{(1)}}{з_n^{(2)}}\right| \geqslant \eta_0. \tag{16}$$

Пусть теперь $\Phi_n(з)$ функция, отображающая конформно круг $|з| < 1$ на область D_n^* так, что $\Phi_n(0) = 0$ и $\Phi_n(1) = F_n(1)$. Тогда для нее справедливы неравенства (12),

$$\left|\frac{\Phi_n\left(з_n^{(1)}\right)}{\Phi_n\left(з_n^{(2)}\right)}\right| < 1 + \frac{\eta_0}{2}, \quad \left|\arg\frac{\Phi_n\left(з_n^{(1)}\right)}{\Phi_n\left(з_n^{(2)}\right)} - \arg\frac{з_n^{(1)}}{з_n^{(2)}}\right| < \eta_0; \tag{17}$$

с другой стороны, по теореме 8. 3, разность $F_n(з) - \Phi_n(з)$, при $n \to \infty$, равномерно стремится к нулю для $|з| \leqslant r < 1$, откуда следует, что

$$\frac{F_n\left(з_n^{(i)}\right)}{\Phi_n\left(з_n^{(i)}\right)} = 1 + \frac{F_n\left(з_n^{(i)}\right) - \Phi_n\left(з_n^{(i)}\right)}{\Phi_n\left(з_n^{(i)}\right)} \to 1, \ (i = 1,\ 2), \tag{18}$$

ибо для точек кольца (14) имеем $|з| \geqslant \frac{1-\varepsilon_n'}{m_0} \geqslant \frac{1-\varepsilon_0}{m_0}$, значит для этих точек $|\Phi_n(з)| \geqslant \frac{1-\varepsilon_0}{m_0}$ (тут важно, что область D_n^* содержит единичный круг и $\Phi_n(0) = 0$). Но из (18) следует, что

(16) и (17) несовместимы, таким образом, мы пришли к противоречию, и тем самым лемма 8. 4 доказана полностью.

Как следствие получаем следующую лемму:

Лемма 8. 5. *Для данных* $R>0$ *и* $\eta_0>0$ *можно указать такие зависящие только от* η_0 *величины* $\varepsilon_0>0$, $\varepsilon'_0>0$ *и* ρ_0, $0<\rho_0<1$, *что для всякой функции* $w=f(z)$, *производящей* ε*-квазиконформное отображение класса* C_1 *круга* $|z-z_0|\leqslant R$ *с* $\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$ *и всяких двух точек* z_1, z_2 *кольца*

$$(1-\varepsilon')r\leqslant|z-z_0|\leqslant r, \tag{19}$$

где $0<r\leqslant r_0=R\rho_0$ *и* $0\leqslant\varepsilon'\leqslant\varepsilon'_0$, *выполняются неравенства*

$$\left|\frac{f(z_1)-f(z_0)}{f(z_2)-f(z_0)}\right|<1+\eta_0,\quad\left|\arg\frac{f(z_1)-f(z_0)}{f(z_2)-f(z_0)}-\arg\frac{z_1-z_0}{z_2-z_0}\right|<\eta_0. \tag{20}$$

Доказательство. Отображение $w=f(z)$ можно представить как результат линейного преобразования $\mathfrak{z}=\frac{z-z_0}{R}$, ε-квазиконформного отображения $\omega=\varphi(\mathfrak{z})$ класса C_1 круга $|\mathfrak{z}|\leqslant 1$ на круг $|\omega|\leqslant 1$ с $\varphi(0)=0$ и однолистного конформного отображения $w=\psi(\omega)$ с $\psi(0)=f(z_0)$.

На основании теоремы об искажении колец при однолистных конформных отображениях (см. приложение, теорема 3. 6) можно подобрать такие ε_0^*, $0<\varepsilon_0^*<1$ и $m_0>0$, зависящие только от η_0, что для любых двух точек ω_1, ω_2 кольца

$$(1-\varepsilon^*)\frac{1}{m}\leqslant|\omega|\leqslant\frac{1}{m},\quad 0\leqslant\varepsilon^*\leqslant\varepsilon_0^*,\quad m\geqslant m_0$$

имеем

$$\left|\frac{\psi(\omega_1)-\psi(0)}{\psi(\omega_2)-\psi(0)}\right|<1+\eta_0,\quad\left|\arg\frac{\psi(\omega_1)-\psi(0)}{\psi(\omega_2)-\psi(0)}-\arg\frac{\omega_1}{\omega_2}\right|<\frac{\eta_0}{2}.$$

На основании леммы 8. 1 можно указать такое $\rho_0>0$, зависящее только от m_0, что для $|\mathfrak{z}|<\rho_0$ имеем $|\varphi(\mathfrak{z})|\leqslant\frac{1}{m_0}$, а на основании леммы 8. 4, подбрав ε_0 и ε_0' так, чтобы для $\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$ и $\varepsilon'\leqslant\varepsilon_0'$ функция $\eta(\varepsilon,\varepsilon')$ не превосходила меньшей из величин $\frac{\eta_0}{2}$ и $\frac{\varepsilon_0^*}{1-\varepsilon_0^*}$, будем иметь

$$1-\varepsilon_0^*<\left|\frac{\varphi(\mathfrak{z}_1)}{\varphi(\mathfrak{z}_2)}\right|<\frac{1}{1-\varepsilon_0^*},\quad\left|\arg\frac{\varphi(\mathfrak{z}_1)}{\varphi(\mathfrak{z}_2)}-\arg\frac{\mathfrak{z}_1}{\mathfrak{z}_2}\right|<\frac{\eta_0}{2}$$

для всяких двух точек $\mathfrak{z}_1$, $\mathfrak{z}_2$ кольца

$$(1-\varepsilon')\rho\leqslant|\mathfrak{z}|\leqslant\rho\leqslant 1.$$

Отсюда следует, что для $\rho \leqslant \rho_0$ точки $\omega_1 = \varphi(\mathfrak{z}_1)$ и $\omega_2 = \varphi(\mathfrak{z}_2)$ лежат в кольце

$$(1-\varepsilon_0^*)\frac{1}{m} \leqslant |\omega| \leqslant \frac{1}{m},$$

где $\frac{1}{m} = \max|\varphi(\mathfrak{z})| \leqslant \frac{1}{m_0}$ для $\mathfrak{z}$ из кольца $(1-\varepsilon')\rho \leqslant |\mathfrak{z}| \leqslant \rho \leqslant \rho_0$.

Так как $\psi(\omega) = f(z)$ и $\arg \mathfrak{z} = \arg(z - z_0)$, то из предыдущего следует, что для ε_0, ε'_0 и $r_0 = R\rho_0$ неравенства (20) выполняются для любых двух точек z_1, z_2 любого кольца (19), что и доказывает лемму.

8. 4. Теоремы о склеивании. Докажем следующую основную теорему о склеивании ([1], теорема 2):

***Теорема 8. 4**.** *Какова бы ни была действительная аналитическая функция $x' = \varphi(x)$ действительного переменного x, $\varphi(-1) = -1$, $\varphi(1) = 1$, $\varphi'(x) > 0$ для $|x| \leqslant 1$, можно построить две аналитические функции $f_1(z, h)$ и $f_2(z, h)$, $z = x + iy$, $h = \text{const}$ такие, что*

а) $f_1(z, h)$ регулярна и однолистна для $|x| < 1, -h < y \leqslant 0$, $f_2(z, h)$ регулярна и однолистна для $|x| < 1, 0 \leqslant y < h$, где h произвольное фиксированное положительное число;

б) $f_1(x, h) = f_2[\varphi(x), h]$, $|x| \leqslant 1$; (1)

в) если $|x_1| < 1, -h < y < 0$ и $|x_2| < 1, 0 < y_2 < h$, то

$$f_1(x_1 + iy_1, h) \neq f_2(x_2 + iy_2, h). \tag{2}$$

Доказательство. Заметим сначала, что для достаточно малых значений h функции $f_1(z, h) = \varphi(z)$, $f_2(z, h) = z$ удовлетворяют всем требованиям теоремы.

Теперь покажем, что если теорема справедлива для некоторого значения $h = h_0$, то она справедлива и для $h = 2h_0$. Пусть D_1 и D_2 образы прямоугольников $|x| < 1, -h_0 < y < 0$ и $|x| < 1, 0 < y < h_0$ в отображениях $\mathfrak{z} = f_1(z, h_0)$ и $\mathfrak{z} = f_2(z, h_0)$ и Γ образ отрезка $|x| < 1$, $y = 0$. Обозначим через D область, состоящую из D_1, D_2 и Γ, и отобразим ее конформно посредством функции $w = g(\mathfrak{z})$ на прямоугольник с вершинами $\pm 1 \pm ik_0$ так, чтобы эти вершины соответствовали точкам $f_1(\pm 1 - ih_0, h_0)$ и $f_2(\pm 1 + ih_0, h_0)$ (см. черт. 8. 1). Тогда функции

$$w = g[f_1(z, h_0)] = f_1(z, 2h_0), \quad w = g[f_2(z, h_0)] = f_2(z, 2h_0)$$

решают задачу. В самом деле, эти функции отображают прямоугольники $|x| < 1, -h_0 < y < 1$ и $|x| < 1, 0 < y < h_0$ соответственно на области $D_1' = g(D_1)$ и $D_2' = g(D_2)$. Продолжая

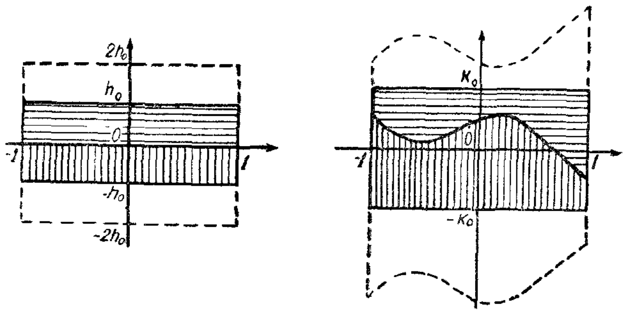
---

* Формулировку и доказательство этой теоремы приводим текстуально по [1].

эти отображения по принципу симметрии, убеждаемся, что они удовлетворяют всем требованиям теоремы в прямоугольниках

$$|x|<1,\ -2h_0<y<0,\ |x|<1,\ 0<y<2h_0.$$

Так как для малых h теорема доказана, то повторяя конечное число раз предыдущее построение, докажем теорему для произвольного фиксированного h.



Чертеж 8.1

Примечание. Функцию $\varphi(x)$ будем называть *функцией склеивания,* а задачу нахождения функций $f_1(z, h)$, $f_2(z, h)$ — *задачей на склеивание.* Теорема 8.4 утверждает, что при сделанных ограничениях на $\varphi(x)$ склеивание всегда возможно. Указанные ограничения можно значительно ослабить. Откладывая пока рассмотрение этого вопроса (см. 10,1), отметим лишь, что достаточно потребовать аналитичности и однолистности $\varphi(z)$ внутри сколь угодно малого кругового двуугольника с вершинами в ± 1, заключающего интервал $|x|<1$*. Доказательство в этом случае то же, только вместо прямоугольников рассматриваются круговые двуугольники с вершинами в ± 1. В частности отсюда следует, что в теореме 8.4 можно допустить, чтобы функция $\varphi(z)$ в точках ± 1 имела степенные особенности.

Если требование конформности заменить требованием квазиконформности отображений $f_1(z, h)$, $f_2(z, h)$, то придем к задаче на квазиконформное склеивание тех же прямоугольников с функцией склеивания $\varphi(x)$. Такое квазиконформное склеивание осуществляют, например, функции

$$f_1(z, h)=\varphi(x)+iy,\quad f_2(z, h)=z. \tag{3}$$

При этом характеристика $p(z)\leqslant\max\limits_{|x|\leqslant 1}\left(\varphi'(x), \frac{1}{\varphi'(x)}\right)$. Можно од-

* Г. М. Голузин. Геометрическая теория функций комплексного переменного, 1952, стр. 504.

нако обойтись и меньшей характеристикой, как это видно из следующей теоремы:

Теорама 8. 5. Если функция склеивания $\varphi(x)$ непрерывно дифференцируема и $\varphi'(x)>0$ на сегменте $|x|\leqslant 1$, то для любого $\varepsilon>0$ можно построить склеивание прямоугольников $|x|\leqslant 1, -h<y\leqslant 0$ и $|x|\leqslant 1, 0\leqslant y<h$, конформное в верхнем прямоугольнике и ε-квазиконформное класса C_1 в нижнем прямоугольнике.*

Доказательство. Из теории приближения вещественных функций известно**, что можно подобрать последовательность многочленов $p_n(x)$ таких, что $p_n(x) \succ \varphi(x)$ и $p_n'(x) \succ \varphi'(x)$ на всем сегменте $|x|\leqslant 1$, при этом можно считать, что $p_n(\pm 1)=\pm 1$. Так как $\varphi'(x)>0$, то для любого $\varepsilon>0$ найдется такое $N=N(\varepsilon)$, что для $n\geqslant N$ выполняется неравенство

$$\frac{1}{1+\varepsilon}<\frac{\varphi'(x)}{p_n'(x)}<1+\varepsilon. \tag{4}$$

Зафиксируем $n\geqslant N$ и положим $\psi(x)=p_n(x)$. Тогда функция

$$f(z)=\psi[\varphi^{-1}(x)]+iy \tag{5}$$

отображает прямоугольник $|x|\leqslant 1, -h<y\leqslant 0$ самого на себя с сохранением вершин. Из (4) следует, что (5) является ε-квазиконформным отображением класса C_1, которое превращает функцию склеивания $\varphi(x)$ в функцию склеивания $\psi(x)$, удовлетворяющую условиям теоремы 8. 4. Производя конформное склеивание, соответствующее $\psi(x)$, получим искомое ε-квазиконформное склеивание, соответствующее $\varphi(x)$.

Рассмотрим еще две задачи на квазиконформные деформации, встречающиеся в приложениях теорем о склеивании.

Задача 1. Пусть производная $\varphi'(x)$ функции склеивания $\varphi(x)$ в теореме 8. 5 имеет в точке $x_0\neq\pm 1$ скачок. Требуется устранить этот скачок путем квазиконформной деформации прямоугольника R: $|x|\leqslant 1, -h<y\leqslant 0$ вблизи точки разрыва.

Решение. Выделим из R произвольно малый квадрат Q с основанием $x_0\leqslant x\leqslant x_1$, $y=0$ и будем строить отображение R на себя, тождественное вне Q и квазиконформное внутри Q. Пусть $\xi=\psi(x)$ функция, соответствующая преобразованию верхнего основания Q. Потребуем, чтобы она кроме

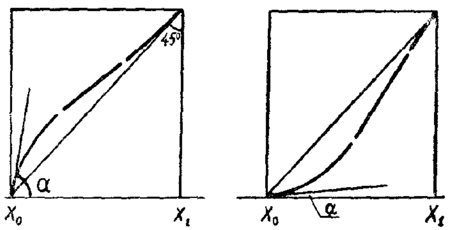
---

* Эта теорема неявно содержится в работе [1] в одном построении при доказательстве теоремы существования квазиконформных отображений (см. ниже теорему 9. 1).

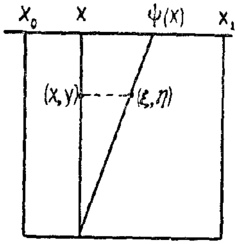
** См., например, Валле Пуссен „Курс анализа бесконечно малых“, 1933, ч. II, гл. IV, § 1.

условий $\psi(x_0)=x_0$, $\psi(x_1)=x_1$, удовлетворяла условиям $\psi'(x_0+0)=\frac{\varphi'(x_0-0)}{\varphi'(x_0+0)}=\lambda$ и $\psi'(x_1-0)=1$. Тогда для новой функции склеивания $\varphi[\psi(x)]=\Phi(x)$ будем иметь: $\Phi'(x_0+0)=\varphi'(x_0-0)$ и $\Phi'(x_1-0)=\varphi'(x_1-0)$, следовательно, новая функция склеивания, совпадающая с $\Phi(x)$ на интервале (x_0, x_1) и с $\varphi(x)$ вне этого интервала, будет непрерывно дифференцируема и $\Phi'(x)>0$ всюду на основании R.

Функцию $\xi=\psi(x)$ можно построить с помощью двух дуг окружностей, имеющих соответственно наклон λ и 1 в точках x_0, x_1 и прямолинейного касательного к ним отрезка с наклоном сколь угодно близким к 1 (см. черт. 8. 2). При этом $\max\left(\psi'(x), \frac{1}{\psi'(x)}\right)=\lambda$ или $\frac{1}{\lambda}$.



Чертеж 8. 2



Чертеж 8. 3

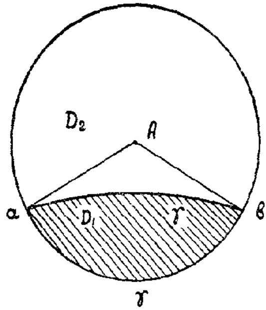
Отображение Q на себя можно получить таким образом: переведем отрезок, соединяющий точки x, $x-i(x_1-x_0)$ в отрезок, соединяющий точки $\psi(x)$, $x-i(x_1-x_0)$ так, что ординаты точек не меняются. Тогда (черт. 8. 3):

$$\xi=x+\frac{(x_1-x_0)-y}{x_1-x_0}[\psi(x)-x],\ \eta=y, \tag{6}$$

откуда следует, что характеристика p отображения Q на себя не превосходит $\lambda+\sqrt{\lambda-1}$, если $\lambda>1$ и $\frac{1}{\lambda}+\sqrt{\frac{1}{\lambda}-1}$, если $\lambda<1$ (подсчет предоставляем читателю). В частности, *если λ близко к единице, то p также близко к единице.*

Задача 2. *Пусть круг разбит дугой γ, ортогональной к граничной окружности, на два круговых двуугольника D_1, D_2 и пусть S_1, S_2 круговые сектора, на которые радиусы, касательные к γ, разбивают тот же круг. Требуется отобразить квазиконформно двуугольники D_1, D_2 на соответствующие сектора S_1, S_2* (см. черт. 8. 4) *так, чтобы граница окружности оставалась неподвижной.*

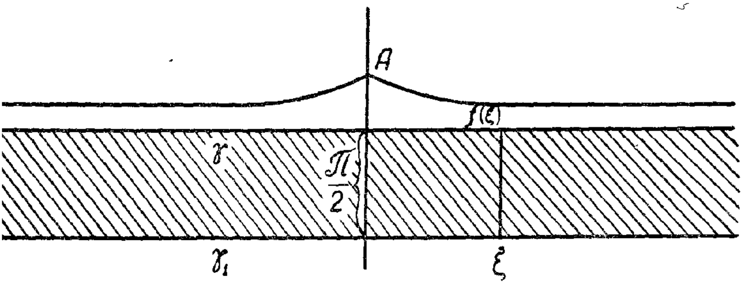
Решение. Пусть a и b концы дуги γ. Построим отображение $з = \ln \frac{z-a}{z-b} + \text{const}$. Тогда отображение D_1 на S_1 сводится к отображению прямолинейной полосы на криволинейную полосу (см. черт. 8.5), что достигается сохранением абсциссы и пропорциональным растяжением ординаты:



Чертеж 8.4

$$\xi_1 = \xi, \quad \eta_1 = \eta\left[1 + \frac{2}{\pi} f(\xi)\right]. \tag{7}$$

Читателю предлагается проверить, что характеристика p отображения (7) не превосходит $1 + \frac{3(\pi - 2\alpha)}{2\alpha}$ и стремится к 1 при $\alpha \to \frac{\pi}{2}$. Заметим еще, что $p(a) = p(b) = 1$.



Чертеж 8.5

§ 9. ТЕОРЕМЫ М. А. ЛАВРЕНТЬЕВА О СУЩЕСТВОВАНИИ КВАЗИКОНФОРМНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ С ОДНОЙ ПАРОЙ ХАРАКТЕРИСТИК

9. 1. Основная теорема. Докажем следующую теорему М. А. Лаврентьева ([1], теорема 3), являющуюся основной в теории квазиконформных отображений с одной парой характеристик.

Теорема 9. 1. Пусть в круге $|z| \leqslant 1$ *задано произвольное непрерывное распределение характеристик* $p(z)$ *и* $\Theta(z)$*. *Тогда существует гомеоморфное отображение* $w = f(z)$ *круга* $|z| \leqslant 1$ *на круг* $|w| \leqslant 1$, *квазиконформное с характеристиками* p, Θ *внутри круга* $|z| < 1$. *Это отображение*

* Напомним, что это означает непрерывность p всюду в круге $|z| \leqslant 1$ и непрерывность Θ во всякой замкнутой подобласти этого круга, где $p \neq 1$, что эквивалентно непрерывности соответствующих характеристик α, β, γ во всем круге $|z| \leqslant 1$.

всегда представимо в виде предела равномерно сходящейся в круге $|z| \leqslant 1$ последовательности квазиконформных отображений класса C_1 круга $|z| \leqslant 1$ на круг $|w| \leqslant 1$ и определено с точностью до линейного преобразования круга $|w| < 1$ самого на себя.

Доказательство. Для доказательства М. А. Лаврентьев вводит класс P_ε функций $f_\varepsilon(z)$, обладающих следующими свойствами: они производят квазиконформное отображение класса C_1 круга $|z| \leqslant 1$ на круг $|w| \leqslant 1$ и бесконечно малые эллипсы $E_h(p(z_0), \Theta(z_0); z_0)$, $|z_0| < 1$, переводят в бесконечно малые круги с точностью до ε, а именно так, что

$$\overline{\lim_{h\to 0}} \frac{\max\limits_{z\in E_h} |f_\varepsilon(z) - f_\varepsilon(z_0)|}{\min\limits_{z\in E_h} |f_\varepsilon(z) - f_\varepsilon(z_0)|} < 1+\varepsilon. \tag{1}$$

Затем он доказывает существование функций $f_\varepsilon(z)$ и предельным переходом из последовательности функций $\left\{f_{\varepsilon_n}(z)\right\}$, $\varepsilon_n \to 0$ получает искомое отображение $f(z)$ *.

Зададимся $\varepsilon_0 > 0$ и будем строить функцию $f_{\varepsilon_0}(z)$ класса P_{ε_0}. Для этого разобьем круг $|z| \leqslant 1$ с помощью квадратной сетки со стороной $\eta(\varepsilon_0)$ настолько малой, чтобы в квадратах разбиения $\{Q_{ij}\}$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$, включая неполные квадраты, примыкающие к окружности $|z| = 1$, колебание характеристик не превосходило $\varepsilon = \frac{\varepsilon_0}{8}$. В каждом квадрате Q_{ij} зафиксируем точку z_{ij} и рассмотрим аффинное отображение $f_{ij}(z)$ с характеристиками $p_{ij} = p(z_{ij})$, $\Theta_{ij} = Q(z_{ij})$. Соотношения 1, 3 (13) и 1, 3 (14) показывают, что для Q_{ij} отображение $f_{ij}(z)$ принадлежит классу $P_{2\varepsilon}$.

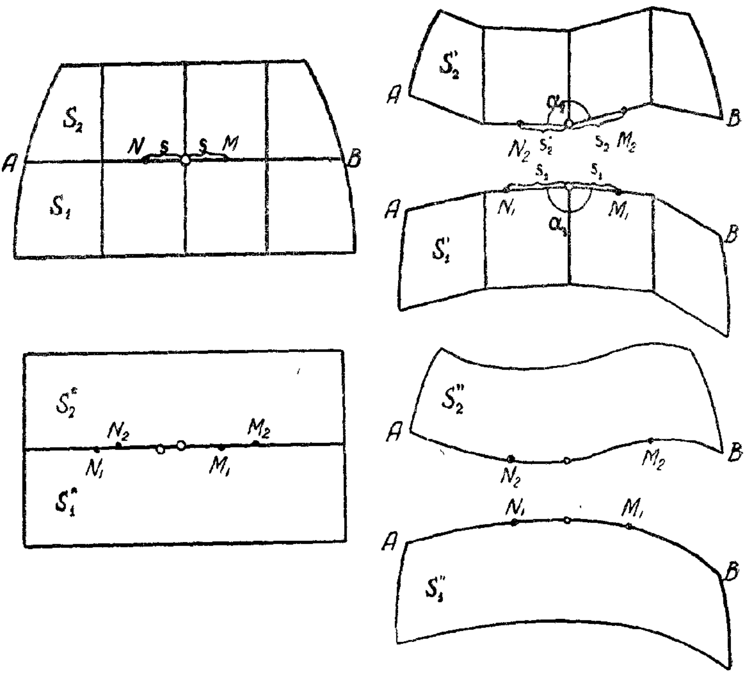
Так как при этом граничные стороны Q_{ij}, отличные от дуг окружности $|z| = 1$, изменяются линейно, то, подвергая если нужно $f_{ij}(z)$ целым линейным преобразованиям, можно добиться того, чтобы функции $f_i(z) = f_{ij}(z)$ для $z \in Q_{ij}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ представляли отображения класса $P_{2\varepsilon}$ для полос $S_i = \sum\limits_{j=1}^{n} Q_{ij}$.

Образ $S_i' = f_i(S_i)$ полосы S_i представляет полосу, ограниченную двумя ломаными линиями и двумя дугами эллипсов. При этом соседние полосы связаны между собой кусочно линейным соответствием вдоль соответствующих граничных отрезков, имеющих общий прообраз в круге $|z| \leqslant 1$ (см. черт. 9. 1). Ясно, что при достаточно малом η углы при внутренних вершинах указанных

---

* Заметим, что построение функции $f_\varepsilon(z)$ класса P_ε эквивалентно построению квазиконформного отображения класса C_1 круга $|z| \leqslant 1$ на круг $|w| \leqslant 1$ с характеристиками, отличающимися от характеристик $f(z)$ на величину порядка ε (см. также примечание к доказательству теоремы 9. 2).

маных сколь угодно близки к π, а отношения производных от функций соответствия между соседними отрезками соседних полос сколь угодно близки к 1. Так, например, можно добиться, чтобы (черт. 9. 1)



Чертеж 9. 1

$$\left\{\begin{array}{ll} s_1=\lambda_1 s, & s_1'=\lambda_1' s \\ s_2=\lambda_2 s, & s_2'=\lambda_2' s \end{array}\right. \quad \left|\frac{\lambda_2'}{\lambda_1'}-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|<\frac{\varepsilon}{3},$$

$$|\alpha_1-\pi|<\frac{\varepsilon}{3}, \quad |\alpha_2-\pi|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

Поэтому на основании решения задачи 2 в 8.4 можно при достаточно малом η с помощью локальной ε-квазиконформной деформации класса C_1 скруглить углы около внутренних вершин полос S_i'. Полученные таким образом полосы S_i'' отобразим конформно на полосы S_i^* так, чтобы они примыкали друг к другу вдоль соответствующих сторон, образуя прямоугольник, соответствующий всему кругу $|z|\leqslant 1$. В вершинах полос S_i'' указанные отображения ведут себя как степени, а на остальной части границы они непрерывно дифференцируемы, причем производная отлична от нуля (см. приложение, примечание к теореме 3. 2). Отсюда следует, что отношение производных от функций соответствия справа и слева от точек разрыва остается сколь угодно близким к 1 при достаточно малых η. Поэтому, на основании решения задачи 1 в 8, 4, можно при помощи добавочной локальной ε-квазиконформной деформации полос S_i^* вблизи образов внутренних вершин полос S_i' добиться того, чтобы функции соответствия между соседними полосами S_i^* были непрерывно дифференцируемы и имели положительную производную всюду, исключая крайние вершины этих полос, где функции соответствия ведут себя как степени.

На основании теоремы 8. 5 и примечания к теореме 8. 4 можно произвести последовательное ε-квазиконформное склеивание всех полос S_i^* (вспомогательную ε-квазиконформную деформацию производим при этом сначала в S_1^*, потом в S_2^* и т. д.). Отображая полученный прямоугольник на круг $|w| < 1$, получим искомое отображение $f_{\varepsilon_0}(z)$.

В самом деле, каждый исходный квадрат Q_{ij} кроме аффинного отображения $f_{ij}(z)$ участвовал еще не более чем в трех ε-квазиконформных деформациях класса C_1, поэтому при достаточно малом $\eta = \eta(\varepsilon_0)$ результирующее отображение будет класса P_{ε_0}.

Рассмотрим теперь последовательность функций $f_n(z) \in P_{\varepsilon_n}$, $f_n(0) = 0$, $\varepsilon_n \to 0$. На основании теоремы 8. 1, можно выбрать последовательность $\{f_{n_k}(z)\}$, равномерно сходящуюся в круге $|z| \leqslant 1$ к функции $f(z)$, $f(0) = 0$, гомеоморфно отображающего этот круг на круг $|w| \leqslant 1$. Для упрощения записи будем считать, что с самого начала $f_n(z) \to f(z)$. Убедимся, что функция $f(z)$ осуществляет требуемое квазиконформное отображение. Для этого достаточно показать, что для любого $\varepsilon_0 > 0$ и любой точки z_0 круга $|z| < 1$ можно указать настолько малое число $h_0 > 0$, что для эллипсов $E_h(p(z_0), \Theta(z_0); z_0)$, $h \leqslant h_0$, имеем

$$\frac{\max\limits_{z \in E_h} |f(z) - f(z_0)|}{\min\limits_{z \in E_h} |f(z) - f(z_0)|} \leqslant 1 + \varepsilon_0. \tag{2}$$

Задавшись $\varepsilon_0 > 0$, подберем такое ε^*, чтобы для $\varepsilon \leqslant 3\varepsilon^*$ и $\varepsilon' \leqslant \varepsilon^*$ функция $\eta(\varepsilon, \varepsilon')$ леммы 8. 4 не превосходила ε_0:

$$\eta(\varepsilon, \varepsilon') \leqslant \varepsilon_0. \tag{3}$$

Подберем затем такое натуральное число m, чтобы для $n \geqslant m$ величина $\varepsilon_n \leqslant \frac{\varepsilon^*}{1 - \varepsilon^*}$. Рассмотрим функцию $\zeta = f_m(z)$. Так как она принадлежит классу P_{ε_m} и $\varepsilon_m \leqslant \frac{\varepsilon^*}{1 - \varepsilon^*}$, то для любой фиксированной точки z_0, $|z_0| < 1$, найдется такое значение $h_0 =$

$=h_0(z_0, \varepsilon^*)$, что для $h \leqslant h_0$ образ $f_m(E_h)$ эллипса $E_h(p(z_0), \Theta(z_0); z_0)$ будет заключен в кольце

$$(1-\varepsilon^*)\rho \leqslant |\zeta-\zeta_0| \leqslant \rho \leqslant 1-|\zeta_0|, \ \zeta_0 = f_m(z_0). \tag{4}$$

Рассмотрим теперь функцию $\omega = f_n(z)$, $n > m$. Функция $\omega = \chi(\zeta) = f_n[f_m^{-1}(\zeta)]$ производит квазиконформное отображение класса C_1 круга $|\zeta| \leqslant 1$ на круг $|\omega| \leqslant 1$ с характеристикой $p < (1+\varepsilon_m)(1+\varepsilon_n) < 1+3\varepsilon^*$, $\chi(0)=0$, поэтому к ней применима лемма 8. 4, из которой следует, что для любых двух точек ζ_1, ζ_2 кольца (4) выполняется, с учетом (3), неравенство

$$1-\varepsilon_0 \leqslant \left|\frac{\chi(\zeta_1)-\chi(\zeta_0)}{\chi(\zeta_2)-\chi(\zeta_0)}\right| \leqslant 1+\varepsilon_0, \tag{5}$$

или, так как $\chi(\zeta) = f_n(z)$,

$$1-\varepsilon_0 \leqslant \left|\frac{f_n(z_1)-f_n(z_0)}{f_n(z_2)-f_n(z_0)}\right| \leqslant 1+\varepsilon_0, \tag{6}$$

где $z_1 = f_m^{-1}(\zeta_1)$ и $z_2 = f_m^{-1}(\zeta_2)$ произвольные точки эллипса E_h. Производя в (6) предельный переход $n \to \infty$, получаем неравенство

$$1-\varepsilon_0 \leqslant \left|\frac{f(z_1)-f(z_0)}{f(z_2)-f(z_0)}\right| \leqslant 1+\varepsilon_0. \tag{7}$$

Так как ε_0 сколь угодно мало, то из (7) следует, что

$$\lim_{h\to 0} \frac{\max\limits_{z\in E_h} |f(z)-f(z_0)|}{\min\limits_{z\in E_h} |f(z)-f(z_0)|} = 1, \tag{8}$$

следовательно, $f(z)$ переводит бесконечно малый эллипс E_h в бесконечно малый круг что и требовалось доказать.

Таким образом, существование $f(z)$ доказано.

Пусть теперь наряду с $w = f(z)$ имеется другое квазиконформное отображение $w = \varphi(z)$ круга $|z| < 1$ на круг $|w| < 1$ с теми же характеристиками $p(z)$, $\Theta(z)$. Тогда функция $\varphi[f^{-1}(w)]$ осуществляет гомеоморфное отображение круга $|w| < 1$ самого на себя, причем бесконечно малые круги переходят в бесконечно малые круги. Но такое отображение по теореме Д. Е. Меньшова (см. теорему 5. 5) конформно, следовательно $f(z)$ определена с точностью до линейного преобразования круга $|w| < 1$ самого на себя.

Остается, наконец, заметить, что построенная выше функция получилась как предел последовательности функций $f_n(z) \in P_{\varepsilon_n}$, равномерно сходившейся в круге $|z| \leqslant 1$. Но все эти функции производили квазиконформное отображение класса C_1 круга $|z| \leqslant 1$ на круг $|w| \leqslant 1$. Отсюда, на основании доказанного уже свойства единственности следует, что такое представление имеет место для любого квазиконформного отображения круга $|z|<1$ на круг $|w|<1$ с непрерывными в $|z|\leqslant 1$ характеристиками. Таким образом, теорема 9. 1 доказана полностью.

9. 2. Следствия и дополнения*. Отметим сначала такое следствие: *леммы 8. 5 и теоремы 8. 1—8. 3 справедливы для произвольных квазиконформных отображений круга $|z|<1$ на круг $|w|<1$ с характеристиками, непрерывными в круге $|z|\leqslant 1$*. Это следует из того, что, в силу свойства единственности, указанного в теореме 9. 1, всякое такое отображение представимо в виде предела равномерно сходящейся последовательности Q-квазиконформных отображений класса C_1, для которых эти леммы и теоремы справедливы.

Докажем теперь следующую теорему:

Теорема 9. 2. *Пусть $\{f_n(z)\}$ $(n=1,2,\ldots)$ последовательность Q-квазиконформных отображений класса C_1 круга $|z|\leqslant 1$ на круг $|w|\leqslant 1$ с характеристиками $\alpha_n(z)$, $\beta_n(z)$, $\gamma_n(z)$. Если $f_n(z)$ сходятся равномерно в круге $|z|\leqslant 1$ к $f(z)\not\equiv \mathrm{const}$ и α_n, β_n, γ_n сходятся равномерно внутри области G, принадлежащей кругу $|z|<1$ к $\alpha(z)$, $\beta(z)$, $\gamma(z)$, то $f(z)$ осуществляет гомеоморфное отображение круга $|z|\leqslant 1$ на круг $|w|\leqslant 1$, квазиконформное с характеристиками α, β, γ в G.*

Доказательство. Применяя теорему 8. 1 к последовательности функций

$$f_n^*(z)=\frac{f_n(z)-f_n(0)}{1-\overline{f_n(0)}\,f_n(z)}, \tag{1}$$

получаем подпоследовательность $\{f_{n_k}^*(z)\}$, равномерно сходящуюся в круге $|z|\leqslant 1$ к функции $f^*(z)$, гомеоморфно отображающей круг $|z|\leqslant 1$ на круг $|w|\leqslant 1$. Если $|f(0)|<1$, то имеем

$$f^*(z)=\frac{f(z)-f(0)}{1-\overline{f(0)}\,f(z)}, \tag{2}$$

откуда следует, что $f(z)$ также производит гомеоморфное отображение круга $|z|\leqslant 1$ на круг $|w|\leqslant 1$; если же $|f(0)|=1$, то •

* Приводимые ниже следствия и дополнения взяты из [1] с некоторым изменением отдельных формулировок и доказательств. Исключение составляет теорема 9. 4, доказанная П. П. Белинским [26].

$$f^*(z)=\lim_{k\to\infty}\frac{f_{n_k}(z)-f_{n_k}(0)}{1-\overline{f_{n_k}(0)}f_{n_k}(z)},\tag{3}$$

и $f(z)\equiv f(0)$, то есть $f(z)\equiv \text{const}$. Отсюда следует первая часть теоремы 9. 2.

Переходим к доказательству утверждения о квазиконформности отображения $f(z)$.

Для произвольной точки $z_0 \in G$ можно указать такие $h_0>0$ и $m\geqslant 1$, что внутри эллипса $E_{h_0}(p(z_0), \Theta(z_0); z_0)$ характеристики отображений $f_n(z)$ будут сколь угодно мало отличаться от характеристик $\alpha_0=\alpha(z_0)$, $\beta_0=\beta(z_0)$, $\gamma_0=\gamma(z_0)$, если $n\geqslant m$. Отсюда следует, что для любого $\varepsilon_0>0$ можно h_0 и m подобрать так, что при аффинном отображении $\zeta=l(z, z_0)$ с характеристиками α_0, β_0, γ_0 эллипса E_{h_0} на круг $|з|\leqslant 1$, $l(z_0, z_0)=0$, $f_n(z)$ перейдут в ε-квазиконформные отображения $f_n^*(\zeta)$ с $\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$. В силу леммы 8. 5 для любого $\eta_0>0$ можно указать такие $\varepsilon_0>0$ и r_0, $0<r_0<1$, что для любых двух точек ζ_1, ζ_2 любой окружности $|\zeta|=r\leqslant r_0$ имеем

$$\left|\frac{f_n^*(\zeta_1)-f_n^*(0)}{f_n^*(\zeta_2)-f_n^*(0)}\right|<1+\eta_0, \left|\arg\frac{f_n^*(\zeta_1)-f_n^*(0)}{f_n^*(\zeta_2)-f_n^*(0)}-\arg\frac{\zeta_1}{\zeta_2}\right|<\eta_0.\tag{4}$$

Так как окружностям $|\zeta|=r$ соответствуют эллипсы E_h, $h=h(r)$, то из предыдущего видно, что для любого $\eta_0>0$ можно указать $h_0>0$ и $m\geqslant 1$ так, что для любых двух точек z_1, z_2 любого эллипса E_h, $h\leqslant h_0$ для $n\geqslant m$ имеем

$$\left|\frac{f_n(z_1)-f_n(z_0)}{f_n(z_2)-f_n(z_0)}\right|<1+\eta_0,\tag{5}$$

откуда при $n\to\infty$ следует, что

$$\left|\frac{f(z_1)-f(z_0)}{f(z_2)-f(z_0)}\right|\leqslant 1+\eta_0,\tag{6}$$

значит

$$\overline{\lim_{h\to 0}}\frac{\max\limits_{z\in E_h}|f(z)-f(z_0)|}{\min\limits_{z\in E_h}|f(z)-f(z_0)|}=1,\tag{7}$$

что и требовалось доказать.*

---

* Аналогично можно было вести вторую часть доказательства теоремы 9. 1. Получаемые попутно из (4) неравенства

$$\left|\frac{f^*(\zeta_1)-f^*(0)}{f^*(\zeta_2)-f^*(0)}\right|\leqslant 1+\eta_0, \left|\arg\frac{f^*(\zeta_1)-f^*(0)}{f^*(\zeta_2)-f^*(0)}-\arg\frac{\zeta_1}{\zeta_2}\right|\leqslant\eta_0\tag{8}$$

для $f^*(\zeta)=f[l^{-1}(\zeta, z_0)]$, нам еще пригодятся (см. теорему 10. 3).

Примечание. Так как по теореме 9. 1 всякое квазиконформное отображение круга $|z|<1$ на круг $|w|<1$ с характеристиками, непрерывными в круге $|z|\leqslant 1$, можно равномерно аппроксимировать квазиконформными отображениями класса C_1, то теорема 9. 2 остается в силе, если вместо требования принадлежности к классу C_1 потребовать от $f_n(z)$, чтобы их характеристики были непрерывны в замкнутом круге $|z|\leqslant 1$.

Докажем теорему 9. 1 в следующем усиленном виде:

Теорема 9 1'. *Пусть в круге $|z|<1$ задано непрерывное распределение характеристик и $p\leqslant Q$. Тогда существует квазиконформное отображение круга $|z|<1$ на круг $|w|<1$ с данными характеристиками. Это отображение гомеоморфно в круге $|z|\leqslant 1$, равномерно аппроксимируемо Q-квазиконформными отображениями класса C_1 круга $|z|\leqslant 1$ на круг $|w|\leqslant 1$ и определено с точностью до линейного преобразования круга $|w|<1$ на себя.*

Доказательство. Характеристики $p_n(z)=p\left[\left(1-\frac{1}{n}\right)z\right]$,

$\Theta_n(z)=\Theta\left[\left(1-\frac{1}{n}\right)z\right]$ удовлетворяют условиям теоремы 9. 1

и, кроме того, сходятся равномерно внутри круга $|z|<1$ к $p(z)$ и $\Theta(z)$. Строя соответствующие $p_n(z)$, $\Theta_n(z)$ квазиконформные отображения $f_n(z)$, $f_n(0)=0$ круга $|z|\leqslant 1$ на $|w|\leqslant 1$ и применяя к ним теорему 8. 1, получим последовательность $\{f_{n_k}(z)\}$, равномерно сходящуюся в круге $|z|\leqslant 1$. На основании примечания к теореме 9. 2 предельная функция $f(z)$ осуществляет требуемое квазиконформное отображение. Ее единственность с точностью до линейного преобразования круга $|w|<1$ на себя вытекает из теоремы Д. Е. Меньшова (теорема 5. 5).

Примечание. Из доказательства видно, что отображения $f(z)$ равномерно аппроксимируемы в круге $|z|\leqslant 1$ квазиконформными отображениями класса C_1, следовательно, для них также справедливы следствия, указанные в начале 9. 2 и в примечании к теореме 9. 2.

9. 3. *(Продолжение).* В теореме существования можно пойти еще дальше, если воспользоваться следующим замечанием. Пусть G произвольное открытое множество, расположенное в круге $|z|<1$ (граница G может лежать и на окружности $|z|=1$) и $\varphi(z)$, $|\varphi(z)|<M$ какая-либо вещественная функция непрерывная на G. Тогда можно указать последова-

тельность функций $\varphi_n(z)$, $|\varphi_n(z)|<M$, непрерывных в круге $|z|\leqslant 1$ и равномерно сходящихся внутри G к $\varphi(z)$*. Это позволяет теорему 9.1′ формулировать в следующем виде (см. [26]):

Теорема 9.1″. *Пусть на открытом множестве G в круге $|z|<1$ задано непрерывное равномерно ограниченное распределение характеристик $\alpha(z)$, $\beta(z)$, $\gamma(z)$. Тогда существует гомеоморфное отображение круга $|z|\leqslant 1$ на круг $|w|\leqslant 1$, квазиконформное с указанными характеристиками на G и равномерно аппроксимируемое в $|z|\leqslant 1$ Q-квазиконформными отображениями класса C_1.*

Доказательство. В самом деле, равномерно аппроксимируем $\alpha(z)$, $\beta(z)$, $\gamma(z)$ внутри G равномерно ограниченными и непрерывными в круге $|z|\leqslant 1$ распределениями характеристик $\alpha_n(z)$, $\beta_n(z)$, $\gamma_n(z)$ и поступаем далее так, как при доказательстве теоремы 9.1′.

В данной теореме, в отличие от теоремы 9.1′, указанной там единственности вообще нет. Если же единственность (с точностью до линейного преобразования круга $|w|<1$ в себя) имеет место, то будем G обозначать через $G^{(e)}$. Отсюда следует:

Теорема 9.3. *Пусть $\{f_n(z),\ f_n(0)=0,\ f_n(1)=1\}$ $(n=1,2,\ldots)$ последовательность Q-квазиконформных отображений класса C_1 круга $|z|\leqslant 1$ на круг $|w|\leqslant 1$ с характеристиками $\{\alpha_n(z), \beta_n(z), \gamma_n(z)\}$ равномерно сходящимися к $\alpha(z)$, $\beta(z)$, $\gamma(z)$ внутри открытого множества $G^{(e)}$. Тогда последовательность $\{f_n(z)\}$ сходится равномерно в замкнутом круге $|z|\leqslant 1$ и предельная функция $f(z)=\lim f_n(z)$ осуществляет гомеоморфное отображение круга $|z|\leqslant 1$ на круг $|w|\leqslant 1$, квазиконформное с характеристиками $\alpha(z)$, $\beta(z)$, $\gamma(z)$ внутри $G^{(e)}$.*

Доказательство. Из $\{f_n(z)\}$ можно выделить равномерно сходящуюся в круге $|z|\leqslant 1$ подпоследовательность $\{f_{n_k}(z)\}$ с предельной функцией $f(z)$, удовлетворяющей по теореме 9.2 всем требованиям доказываемой теоремы. Допуская от противного, что не вся последовательность $\{f_n(z)\}$ сходится к $f(z)$, мы могли бы выделить из нее другую подпоследовательность с другой предельной функцией, допустим

---

* Построение $\varphi_n(z)$ представляем читателю. О продолжении непрерывных функций см. П. С. Александров „Введение в общую теорию множеств и функций“, 1948, гл. VI, § 13 и Г. М. Фихтенгольц „Курс дифференциального и интегрального исчисления“, т. I, 1947, дополнение.

$f^*(z)$, с теми же свойствами, что и $f(z)$. Но, по определению $G^{(e)}$, функции $f(z)$ и $f^*(z)$ связаны линейным преобразованием, поэтому в силу нормировки они тождественно совпадают, что приводит нас к противоречию. Таким образом, теорема доказана полностью.

Возникает вопрос о критерии для определения множества $G^{(e)}$. В общем случае тут известно мало. Однако при более узком понимании $G^{(e)}$, которое получается, если рассматривать только отображения с характеристиками непрерывными в G до ее границы в $|z|<1$, включительно, имеем следующую теорему П. П. Белинского [26]*:

Теорема 9. 4. *Гомеоморфное отображение $|z|<1$ на $|w|<1$, квазиконформное вне гладкой дуги γ и с характеристиками, равномерно ограниченными и непрерывными до обеих сторон γ, определяется с точностью до линейного преобразования $|w|<1$ на себя.*

Доказательство. Для доказательства нам потребуется следующее усиление леммы 8. 3:

Пусть круг $|z|<1$ разбит с помощью произвольной конечной системы гладких дуг S на области $\{G_k\}$ $(k=1, 2,\ldots,s)$ и $f(z)$ производит гомеоморфное отображение $|z|\leqslant 1$ на $|w|\leqslant 1$, квазиконформное вне S с характеристиками, непрерывными в G_k до их границ (на S характеристики имеют вообще разрыв 1-го рода). Тогда, если всюду $p<\varepsilon$, то для любого простого спрямляемого контура C, лежащего в круге $|z|<1$, выполняется неравенство

$$\left|\int\limits_C f(z)\,dz\right|<4\pi\varepsilon. \tag{9}$$

В самом деле, если C лежит внутри одной из областей G_k или состоит из системы таких контуров C_i $(i=1, 2,\ldots, m)$, расположенных попарно вне друг друга в областях G_k, то (9) имеет место в силу примечания к лемме 8. 3, ибо мы можем $f(z)$ равномерно аппроксимировать в замкнутых областях $\overline{G}_k$ квазиконформными их отображениями $\{f_{n_k}(z)\}$ $(n=1, 2,\ldots)$ на $f(\overline{G}_k)$ класса C_1 с характеристиками, сколь угодно близкими

---

* Если F дополнение G до $|z|<1$, то для того, чтобы G было $G^{(e)}$, повидимому, необходимо и достаточно, чтобы мера $mF=0$ и $mf(F)=0$, где $f(z)$ произвольное гомеоморфное отображение $|z|\leqslant 1$ на $|w|\leqslant 1$, квазиконформное с ограниченными непрерывными характеристиками на G. В последнее время П. П. Белинским было доказано, что если F состоит из гладких изолированных дуг, то $mf(F)=0$ и G есть $G^{(e)}$. (П. П. Белинский, диссертация, 1954). Можно ожидать, что доказательство пройдет и для F, состоящего из спрямляемых дуг. Указанное выше общее предположение остается открытым. Приводимая в тексте более ранняя теорема П. П. Белинского относится к $G^{(e)}$ в более узком смысле: *если F состоит из гладких дуг, то G есть $G^{(e)}$ в узком смысле.*

к характеристикам $f(z)$ (на общих граничных дугах смежных областей G_k соответствующие функции $f_{n_k}(z)$ вообще не совпадают).

Пусть теперь C простой замкнутый спрямляемый контур в $|z|<1$, ограничивающий область Π и имеющий не более конечного числа точек общих с S. Тогда S разбивает Π на конечное число областей Π_j $(j=1, 2, \ldots, n)$, расположенных в $\overline{G}_k$ и ограниченных простыми контурами C_j, составленными из дуг S и C, и

$$\int\limits_C f(z)\,dz = \sum_{j=1}^{n} \int\limits_{C_j} f(z)\,dz\,.$$

Аппроксимируя C_j внутри Π_j простыми замкнутыми контурами C_{jl} $(l=1, 2\ldots)$, будем иметь

$$\int\limits_{C_j} f(z)\,dz = \lim_{l\to 1} \int\limits_{C_{jl}} f(z)\,dz \quad (j=1, 2, \ldots, n),$$

следовательно,

$$\int\limits_C f(z)\,dz = \lim_{l\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \int\limits_{C_{jl}} f(z)\,dz$$

и, так как по предыдущему

$$\left| \sum_{j=1}^{n} \int\limits_{C_{jl}} f(z)\,dz \right| < 4\pi\varepsilon,$$

то

$$\left| \int\limits_C f(z)\,dz \right| < 4\pi\varepsilon$$

(неравенство строгое, так как можно было все время пользоваться соотношением 8. 2 (8)). Отсюда следует (8) и для произвольного спрямляемого контура C.

Вернемся к доказательству теоремы 9. 4. Пусть $w=f(z)$ гомеоморфное отображение $|z|\leqslant 1$ на $|w|\leqslant 1$, получаемое по теореме 9. 1'' в виде предела квазиконформных отображений $w=f_n(z)$ класса C_1 круга $|z|\leqslant 1$ на круг $|w|\leqslant 1$, и пусть $\omega=\varphi(z)$ какое-либо гомеоморфное отображение $|z|\leqslant 1$ на $|\omega|\leqslant 1$, квазиконформное вне дуги γ, с темн же характеристиками, что у $f(z)$. Так как $f_n(z) => f(z)$ для $|z|\leqslant 1$ и одновременно $f_n^{-1}(w) \to f^{-1}(w)$ для $|w|\leqslant 1$, то $\omega=\psi_n(w)=$

$= \varphi[f_n^{-1}(w)] \to \psi(w) = \varphi[f^{-1}(w)]$. В силу того, что максимальное отклонение ε_n между характеристиками $f_n(z)$ и $f(z)$ стремится к нулю при $n \to \infty$ и линии разрыва характеристик $\psi_n(w)$ кусочно гладкие, то отображения $\omega = \psi_n(w)$ удовлетворяют условиям доказанной выше усиленной леммы 8.3*, поэтому для любого $\varepsilon > 0$ и любого простого спрямляемого контура C в $|w| < 1$ при достаточно большом n имеем

$$\left| \int_C \psi_n(w)\, dw \right| < 4\pi\varepsilon,$$

следовательно,

$$\left| \int_C \psi(w)\, dw \right| < 4\pi\varepsilon,$$

откуда

$$\int_C \psi(w)\, dw = 0,$$

и из теоремы Морера следует аналитичность $\psi(w)$, что и доказывает утверждение. Остается заметить, что от $\varphi(z)$ достаточно требовать гомеоморфности отображения $|z| < 1$, ибо рассуждения можно проводить для $|z| \leqslant r < 1$.

9. 4. Класс отображений A_Q. Обозначим через A_Q класс гомеоморфных отображений $|z| \leqslant 1$ на $|w| \leqslant 1$, обладающих тем свойством, что

$$\overline{\lim_{\rho \to 0}} \left| \frac{f(z + \rho e^{i\varphi_1}) - f(z)}{f(z + \rho e^{i\varphi_2}) - f(z)} \right| \leqslant Q,\ 0 \leqslant \varphi_1,\ \varphi_2 \leqslant 2\pi.$$

Этот класс включает в себя замыкание, в смысле равномерной сходимости в $|z| \leqslant 1$, класса Q-квазиконформных отображений класса C_1 $|z| \leqslant 1$ на $|w| \leqslant 1$ и, в частности, в силу теоремы 9. 1', квазиконформные отображения $z| < 1$ на $|w| < 1$ с характеристиками, непрерывными и равномерно ограниченными в $|z| < 1$ $(p \leqslant Q)$, а также гомеоморфные отображения, указанные в теоремах 9. 1'' и 9. 4.

На класс отображений A_Q легко переносятся теоремы 4. 1, 5. 2 и 5. 3 о дифференцируемости почти всюду, N-свойстве и формуле Грина, откуда можно вывести теорему о равностепенной непрерывности и компактности при нормировке $f(0) = 0$ и т. д.*

---

* Собственно говоря, каждое отображение $\psi_n(w)$ переводит бесконечно малые „почти эллипсы“ (образы характеристических эллипсов $E(p, \theta; z)$) в бесконечно малые круги, однако для лемм 8. 1—8. 5 и их следствий это не существенно.

Вводя подобный класс отображений в конце своей работы [1], М. А. Лаврентьев ставит задачу о выяснении того, не совпадает ли класс A_Q с замыканием Q-квазиконформных отображений класса C_1 $|z| \leqslant 1$ на $|w| \leqslant 1$. Вопрос этот пока не выяснен.

9. 5. Поведение квазиконформных отображений на границе. Из теоремы 9. 1' следует, что квазиконформное отображение $|z| < 1$ на $|w| < 1$ с непрерывными и ограниченными в $|z| < 1$ характеристиками гомеоморфно в замкнутом круге $|z| \leqslant 1$. Так как квазиконформное отображение $|z| < 1$ на некоторую область D можно представить в виде суперпозиции квазиконформного отображения $|z| < 1$ на $|w| < 1$ и последующего конформного отображения $|w| < 1$ на D, то из предыдущего следует, что граничные свойства Q-квазиконформных отображений $|z| < 1$ близки к свойствам конформных отображений $|z| < 1$. В частности, Q-квазиконформные отображения $|z| < 1$ на жордановы области гомеоморфны в замкнутом круге $|z| \leqslant 1$ (см. приложение, теорема 3. 1).

§ 10. ПРИЛОЖЕНИЯ КВАЗИКОНФОРМНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ С ОДНОЙ ПАРОЙ ХАРАКТЕРИСТИК

10. 1. Конформное склеивание. Возвращаясь к теоремам 8. 4 и 8. 5 о склеивании прямоугольников, докажем следующую теорему:

Теорема 10. 1. Если функция $\varphi(x)$ производит непрерывно дифференцируемое отображение сегмента $[-1, 1]$ на себя, $\varphi(\pm 1) = \pm 1$, $\varphi'(x) > 0$, то возможно конформное склеивание прямоугольников R_1, $|x| < 1$, $-h < y \leqslant 0$ и R_2, $|x| < 1$, $0 < y < h$ $(h > 0)$ с функцией склеивания $\varphi(x)$, определенное с точностью до конформного отображения склеенной области.

Доказательство. Ясно, что функция

$$\zeta(z) = \begin{cases} \varphi(x) + iy, & \text{если } z \in R_1 \\ z & \text{, если } z \in R_2 \end{cases} \tag{1}$$

производит квазиконформное склеивание R_1 и R_2 с функцией склеивания $\varphi(x)$. При этом бесконечно малые кружки из R_1 переходят в бесконечно малые эллипсы с характеристиками

$$p_1(z) = \max\left(\varphi'(x), \frac{1}{\varphi'(x)}\right), \quad \theta_1(z) = \begin{cases} 0, & \text{если } \varphi'(x) > 1, \\ \dfrac{\pi}{2}, & \text{если } \varphi'(x) < 1. \end{cases} \tag{2}$$

Рассмотрим прямоугольник $R = R_1 + R_2$, с характеристиками $p(z) = 1$ в R_2 и $p(z) = p_1(z)$, $\Theta(z) = \Theta_1(z)$ в R_1. По теореме 9.1″ существует квазиконформное отображение $w = \psi(\zeta)$ прямоугольника R на круг $|w| < 1$ с характеристиками $p(z)$, $\Theta(z)$. Ясно, что функции

$$\left.\begin{aligned} f_1(z) &= \psi[\zeta(z)] = \psi[\varphi(x) + iy], && \text{если } z \in R_1, \\ f_2(z) &= \psi[\zeta(z)] = \psi(z), && \text{если } z \in R_2 \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

производят требуемое конформное склеивание R_1 и R_2.

Всякое другое конформное склеивание R_1 и R_2 с функцией склеивания $\varphi(x)$ приводит к квазиконформному отображению R с характеристиками (2), следовательно, по теореме 9.4, оно получается из предыдущего склеивания путем дополнительного конформного отображения*.

10.2. Римановы поверхности и проблема типа**. Простейшее представление о римановой поверхности возникает при рассмотрении отображения плоской области с помощью аналитической функции $w = f(z)$. Абстрагируясь от отображающей функции, приходим к понятию римановой поверхности как многолистной области F, расположенной над всей или над частью расширенной плоскости w так, что каждая точка F, конечная или бесконечно удаленная, принадлежит поверхности вместе с некоторой своей круговой окрестностью, однолистной или конечнолистной (для бесконечно удаленной точки окрестностью служит внешность круга $|w| > R$) и всякие два кружка поверхности могут быть соединены между собой конечной цепочкой кружков, имеющих попарно общие части. Если поверхность F такова, что всякая бесконечная последовательность ее точек $\{P_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ имеет, по крайней мере, одну предельную точку на F, то F называется *замкнутой*, в противном случае — *открытой поверхностью*. Далее, если всякий простой замкнутый контур разбивает F, то F называется *подобной однолистной*. Так, можно показать, что риманова поверхность алгебраической функции $w(z)$, определяемой уравнением $w^2 = a(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)(z - z_4)$ является замкнутой поверхностью, не подобной однолистной: она топологически эквивалентна поверхности тора.

---

* О спрямляемости линии склеивания см. [27]; там же рассматривается общая задача о склеивании. Приложение задач на склеивание к проблеме типа односвязной римановой поверхности см. [28].

** О римановых поверхностях см. А. И. Маркушевич „Теория аналитических функций“, 1950, гл. VIII и Р. Неванлинна „Однозначные аналитические функции“, 1941.

Известная теорема Римана об отображении односвязных областей (см. приложение, 3.2) переносится на произвольные односвязные римановы поверхности и гласит:

Всякую односвязную риманову поверхность можно отобразить взаимно однозначно и конформно на одну из следующих трех канонических областей: всю расширенную плоскость, всю конечную плокость $|z|<\infty$, *единичный круг* $|z|<1$*.

В первом случае поверхность является замкнутой, рода нуль (последнее равносильно подобию однолистности и называется поверхностью *эллиптического типа*. Ей соответствует рациональная отображающая функция $f(z)$; с другой стороны, всякая рациональная функция $f(z)$ отображает расширенную плоскость на поверхность эллиптического типа**.

Во втором и в третьем случаях поверхность является открытой и называется соответственно *поверхностью параболического типа и поверхностью гиперболического типа*. Первые соответствуют функциям $f(z)$, мероморфным во всей конечной плоскости $|z|<\infty$; вторые соответствуют функциям, мероморфным в круге $|z|<1$.

Проблема типа состоит в том, что требуется установить необходимые и достаточные условия, позволяющие определить тип данной открытой односвязной римановой поверхности***.

Пусть F^* двусвязная часть данной открытой односвязной поверхности F, получаемая из нее удалением некоторого кружка. Отображая F конформно на область $|z|<R\leqslant\infty$, замечаем, что модуль F^* будет конечным для F гиперболического типа и бесконечным для F параболического типа. Поэтому, если F^* конформно отобразить на кольцо $1<|w|<\mu^*$, то в случае $\mu^*<\infty$ имеем гиперболический тип, а в случае $\mu^*=\infty$ — параболический тип.

Практически F^* трудно конформно отобразить на кольцо, однако может оказаться возможным построить квазиконформное отображение F^* на кольцо $1<|z|<\mu$. Тогда вопрос о типе F сводится к оценке μ^* при квазиконформном отображении $w=\varphi(z)$ кольца $1<|z|<\mu$ на кольцо $1<|w|<\mu^*$ или, что

* Доказательство см. в книге Г. М. Голузина „Геометрическая теория функций комплексного переменного", 1952, гл. XI, § 2.

** При такого рода отображениях бесконечно удаленная точка и полюса функций рассматриваются наравне с конечными точками. Наглядно это поясняется заменой расширенной плоскости z стереографически ей соответствующей сферой.

*** В последние годы проблема типа односвязной римановой поверхности включается в более общую теорию классификации римановых поверхностей (см. имеющие появиться перевод книги R. Nevanlinna „Uniformisierung", 1953 и нашу обзорную статью в „Успехах математических наук").

эквивалентно, при квазиконформном отображении $\omega=\psi(\varsigma)$ прямоугольника $0<\xi<M=\frac{\ln\mu}{2\pi}$, $0<\eta<1$ на прямоугольник $0<\tau<M^*=\frac{\ln\mu^*}{2\pi}$, $0<h<1$ $\left(\varsigma=\xi+i\eta=\frac{\ln z}{2\pi},\ \omega=\tau+\right.$ $\left.+ih=\frac{\ln w}{2\pi}\right)$. Если $p(\varsigma)$ характеристика отображения $\psi(\varsigma)$, то, на основании 7. 2 (3) и 7. 2 (4), имеем

$$\int\limits_0^M \frac{d\xi}{\int\limits_0^1 p\,d\eta} \leqslant M^* \leqslant \int\limits_0^1\int\limits_0^M p\,d\xi\,d\eta, \tag{1}$$

откуда следует, что расходимость интеграла слева достаточна для параболического типа F, а сходимость интеграла справа — для гиперболического типа F. В частности, из первого при $M=\infty$ и $q(r)=\max\limits_{|z|=r} p(z)$ следует, что для параболического типа F достаточно, чтобы (см. [1], теорема 7),

$$\int\limits_1^\infty \frac{dr}{rq(r)}=\infty, \tag{2}$$

или, чтобы

$$\iint\limits_{1<|z|<\infty} \frac{p(z)-1}{|z|^2}\,d\sigma_z<\infty. \tag{3}$$

Последнее получается из рассмотрения M^*-M и представляет достаточное условие для одновременного обращения в ∞ величин M и M^*.

Если использовать обе характеристики отображения $w=\varphi(z)$, то можно (1) значительно усилить. На этом мы здесь останавливаться не будем (см. [28]).

Отметим еще, что осуществляя Q-квазиконформную деформацию отдельных частей F, мы не меняем ее тип, ибо из (1) для $p\leqslant Q$ имеем

$$\frac{M}{Q}\leqslant M^*\leqslant QM, \tag{4}$$

следовательно M и M^* конечны или бесконечны одновременно. Подобное квазиконформное деформирование F может значительно упростить определение ее типа.

Наконец, в проблеме типа используется и метод склеивания, состоящий в том, что F разбивается на части, последние

Q-квазиконформно отображаются на плоские области и в возникающей таким образом задаче на склеивание определяется тип F по функциям склеивания (см. [28]).

10. 3. Конформное отображение поверхностей. Рассмотрим поверхность Φ, представленную областью D плоскости z и метрической формой

$$ds^2 = Edx^2 + 2Fdxdy + Gdy^2 \tag{1}$$

с непрерывными в D коэффициентами, удовлетворяющими условию

$$W = EG - F^2 > 0. \tag{2}$$

Введем следующее определение:

Определение 10. 1. *Аффинным угловым мероопределением в области D, соответствующим метрической форме ds^2, называется такое угловое мероопределение, в котором угол t между двумя элементами $dz = dx + idy$, $\delta z = \delta x + i\delta y$, выходящими из одной и той же точки z, определяется из соотношения*

$$\cos t = \frac{Edx\delta x + F(dx\delta y + dy\delta x) + Gdy\delta y}{ds\delta s}. \tag{3}$$

Так, например, если поверхность $\Phi \sim \{D, ds^2\}$ возникла в результате аффинного в малом отображении поверхности S, расположенной в евклидовом пространстве, то аффинное угловое мероопределение (3), равно как и само неевклидово мероопределение (1), совпадают с обычным евклидовым мероопределением на S (см. приложение, 4. 1).

Мы знаем также (см. приложение, теорема 4. 1), что другая метрическая форма ds_1^2 с коэффициентами E_1, F_1, G_1, тогда и только тогда приводит к тому же аффинному угловому мероопределению, что и ds^2, когда

$$\frac{E_1}{E} = \frac{F_1}{F} = \frac{G_1}{G}, \tag{4}$$

что эквивалентно соотношению

$$ds_1^2 = \lambda(z)ds^2, \ \lambda > 0. \tag{5}$$

Заметим теперь следующее: бесконечно малому кругу на Φ, определяемому постоянным значением ds и переменными значениями dx, dy, в евклидовой области D соответствует бесконечно малый эллипс (1). Записывая его в виде

$$\gamma dx^2 - 2\beta dxdy + \alpha dy^2 = pdh^2, \tag{6}$$

имеем

$$\frac{\gamma}{E}=\frac{-\beta}{F}=\frac{\alpha}{G}=\frac{1}{\sqrt{W}}, \tag{7}$$

откуда следует, что задание ds^2 в области D порождает в ней непрерывное распределение характеристик α, β, γ, определяемое из (7). В терминах α, β, γ угловое мероопределение (3) принимает вид

$$\cos t=\frac{\gamma dx\delta x-\beta(dx\delta y+dy\delta x)+\alpha dy\delta y}{\sqrt{\gamma dx^2-2\beta dxdy+\alpha dy^2}\ \sqrt{\gamma\delta x^2-2\beta\delta x\delta y+\alpha\delta y^2}} \tag{8}$$

и, так как (4) выражает также необходимое и достаточное условие, чтобы ds_1^2 порождало в D то же распределение характеристик, что и ds^2, то естественно введенное выше аффинное угловое мероопределение (3) связывать с распределением характеристик α, β, γ. Это дает основание смотреть на $\{D;\alpha,\beta,\gamma\}$ как на реализацию в евклидовой области D класса поверхностей с одинаковой угловой метрикой, совпадающей с той, которая определяется в D (8).

Самый характер углового мероопределения (8) выясняется следующей теоремой:

Теорема 10. 1. *Угловое мероопределение (8), соответствующее характеристикам α, β, γ, совпадает с евклидовым угловым мероопределением, которое получается при аффинном в малом отображении области D с характеристиками α, β, γ.*

Доказательство. Пусть $w=f(z)=u+iv$ указанное в теореме отображение. Мы знаем (см. (6) и (13) в 2. 2), что в точках аффинности этого отображения оно ведет себя как отображение

$$du=u_xdx+u_ydy,\quad dv=v_xdx+v_ydy,$$

причем

$$\frac{u_x^2+v_x^2}{\gamma}=\frac{u_xu_y+v_xv_y}{-\beta}=\frac{u_y^2+v_y^2}{\alpha}=J$$

и

$$du^2+dv^2=J(\gamma dx^2-2\beta dxdy+\alpha dy^2),$$

откуда для $dw=du+idv$, $\delta w=\delta u+i\delta v$ легко следует, что

$$\cos t\ (dw,\delta w)=\frac{du\delta u+dv\delta v}{\sqrt{du^2+dv^2}\ \sqrt{\delta u^2+\delta v^2}}=\mathrm{const},$$

значит угол t, определяемый из (8), совпадает с евклидовым углом между dw, δw.

Примечание. Для фиксированной точки $z_0\in D$ угловое мероопределение (8) совпадает с евклидовым, получаемом при чисто аффинном отображении $w = l(z, z_0)$ с характеристиками $\alpha(z_0)$, $\beta(z_0)$, $\gamma(z_0)$.

Теперь мы подошли к следующему основному вопросу: существует ли конформное отображение поверхности $\{D;\ \alpha, \beta, \gamma\}$ с аффинным угловым мероопределением (8) на плоскую область?

Из теорем 7. 1, 9. 1 и 10. 1 получаем следующую теорему:

Теорема 10. 2. *Если характеристики α, β, γ, соответствующие метрической форме ds^2, в области D ограничены, непрерывны и удовлетворяют внутри D интегральному условию Гельдера, то квазиконформное отображение области D с характеристиками α, β, γ, осуществляет конформное отображение $\{D; \alpha, \beta, \gamma\}$ с аффинным угловым мероопределением (8).*

Следствие. Если для евклидовой поверхности S существует в малом аффинное отображение на плоскую область D, порождающее там распределение характеристик, удовлетворяющее условиям теоремы 10, 2, то существует конформное отображение S на плоскую область.

Введем теперь следующее определение:

Определение 10. 2. *Непрерывное однолистное отображение $w=f(z)$ обладает свойством подвижной конформности в точке z_0, если для всякого $\eta_0 > 0$ можно указать такое $r_0 > 0$, что для любых точек z_1, z_2 любой окружности $|z - z_0| = r$, $0 < r \leqslant r_0$ выполняется соотношение*

$$\left| \arg \frac{f(z_1) - f(z_0)}{f(z_2) - f(z_0)} - \arg \frac{z_1 - z_0}{z_2 - z_0} \right| < \eta_0 . \tag{9}$$

Если (9) выполняется после предварительного аффинного преобразования окрестности точки z_0, то мы скажем, что отображение $f(z)$ обладает *свойством подвижной конформности в аффинной угловой метрике*, соответствующей указанному преобразованию. Тогда имеет место следующая теорема:

Теорема 10. 3. *Квазиконформное отображение $w=f(z)$ области D с непрерывными характеристиками α, β, γ обладает свойством подвижной конформности в аффинной угловой метрике, соответствующей характеристиками α, β, γ.*

Доказательство. Пусть $\{f_n(z)\}$ последовательность квазиконформных отображений класса C_1, равномерно сходящаяся внутри эллипса $E_{h_0}(p(z_0), \theta(z_0); z_0) \in D$, сходится вместе со своими характеристиками α_n, β_n, γ_n соответственно к $f(z)$ и α, β, γ. Пусть $\zeta = l(z, z_0)$ аффинное отображение эллипса E_{h_0} на круг $|\zeta| \leqslant 1$. Тогда функции $\varphi_n(\zeta) = f_n[l^{-1}(\zeta)]$ производят квазиконформное отображение класса C_1 круга $|\zeta| \leqslant 1$ с характеристиками $p_n(\varsigma)$ $1 \to$ при $\varsigma \to 0$, и, значит, по лемме 8.5, для любого $\eta_0 > 0$ можно указать такие $\varepsilon_0 > 0$ и r_0, $0 < r_0 < 1$, что для любых точек ς_1, ς_2 любой из окружностей $|\varsigma| = r \leqslant r_0$ выполняются неравенства

$$\left| \frac{\varphi_n(\varsigma_1) - \varphi_n(0)}{\varphi_n(\varsigma_2) - \varphi_n(0)} \right| < 1 + \eta_0,$$
$$\left| \arg \frac{\varphi_n(\varsigma_1) - \varphi_n(0)}{\varphi_n(\varsigma_2) - \varphi_n(0)} - \arg \frac{\varsigma_1}{\varsigma_2} \right| < \eta_0. \tag{10}$$

Так как очевидно $\varphi_n(\varsigma) \Rightarrow \varphi(\varsigma) = f[l^{-1}(\varsigma)]$, то из (10) следует, что (см. 9.2(8))

$$\left| \frac{\varphi(\varsigma_1) - \varphi(0)}{\varphi(\varsigma_2) - \varphi(0)} \right| \leqslant 1 + \eta_0,$$
$$\left| \arg \frac{\varphi(\varsigma_1) - \varphi(0)}{\varphi(\varsigma_2) - \varphi(0)} - \arg \frac{\varsigma_1}{\varsigma_2} \right| \leqslant \eta_0. \tag{11}$$

Первое из неравенств (11) показывает, что для квазиконформного по теореме 9.2 отображения $\varphi(\varsigma)$ имеем $p(0) = 1$, второе же из неравенств (11) выражает свойство подвижной конформности отображения $f(z)$ в точке z_0 в аффинной угловой метрике, соответствующей характеристиками $\alpha(z_0)$, $\beta(z_0)$, $\gamma(z_0)$, что и требовалось доказать.

Следующий пример показывает, что подвижная конформность фактически может иметь место, в то время как обычной конформности не имеется. Строим квазиконформное отображение

$$\xi^* = \xi, \quad \eta^* = \sqrt{\xi} + \eta \tag{12}$$

полуполосы $1 < \xi < \infty$, $0 < \eta < \pi$ плоскости $\zeta = \xi + i\eta$ на криволинейную полуполосу $1 < \xi^* < \infty$, $\sqrt{\xi^*} < \eta^* < \sqrt{\xi^*} + \pi$ плоскости $\zeta^* = \xi^* + i\eta^*$. Тогда конформные отображения $z = e^{1-\varsigma}$, $w = e^{1-\varsigma^*}$ приводят к квазиконформному отображению $w = f(z)$ круга $|z| < 1$ на круг $|w| < 1$ с непрерывными характеристиками, причем $f(0) = 0$, $p(0) = 0$, обладающему в точке $z = 0$ только подвижной конформностью. В самом деле, при отображении (12) полупрямая $1 < \xi < \infty$, $\eta = \text{const}$ переходит в ветвь параболы, уходящую в ∞; при переходе к кругам $|z| < 1$ и $|w| < 1$ получаем соответственно радиус и спираль вокруг начала координат, отсюда, говорить о конформности отображения нельзя, ибо кривой, выходящей из точки $z = 0$ под определенным углом в плоскости w соответствует кривая со спиральной точкой в $w = 0$, следовательно, без определенного направления в этой точке.

10. 4. (α, β, γ)-аналитические и (α, β, γ)-гармонические функции. Основная идея римановой поверхности. Пусть в области D задано распределение характеристик α, β, γ, определяющее соответствующее квазиконформное отображение с точностью до конформного отображения таким распределением является непрерывное распределение (теорема 9. 1), с возможным разрывом первого рода на гладких изолированных дугах (теорема 9. 4.) и т. д. Указанное свойство единственности оправдывает следующие два определения:

Определение 10. 3. *Пусть в области D задано распределение характеристик α, β, γ, определяющее квазиконформное отображение $w = f(z)$ области D с этими характеристиками на плоскую область Δ с точностью до конформного отображения. В этом случае комплекснозначная функция $\zeta = \varphi(z)$ называется (α, β, γ)-аналитической функцией в D, если функция $\zeta = \psi(w) = \varphi[f^{-1}(w)]$ является аналитической в области Δ.*

Определение 10. 4. *В условиях определения 10. 3 действительная функция $U(z)$ называется (α, β, γ)-гармонической функцией в D, если соответствующая функция $U[f^{-1}(w)]$ является гармонической в области Δ.*

Законность данных определений следует из их независимости от выбора квазиконформного отображения $w = f(z)$, ибо выбор другого отображения означает лишь конформное преобразование w, что не влияет на предыдущие определения.

Сказанное приводит нас непосредственно к основной идее, лежащей в понятии римановой поверхности и раскрываемой в следующем определении:

Определение 10. 5. ***Римановой поверхностью называется всякая поверхность F, на которой определено понятие аналитичности комплекснозначной функции, причем для каждой точки $P_0 \in F$ существует такое однолистное отображение $t = \varphi(P)$ окрестности точки P_0 на круг $|t| < 1$, $\varphi(P_0) = 0$, что функция $w = f(P)$ аналитична в P_0 тогда и только тогда, когда функция $f[\varphi^{-1}(t)]$ аналитична в точке $t = 0$.***

В соответствии с этой идеей теорию аналитических (и гармонических) функций следует развивать не только на плоских однолистных и многолистных областях, но и на произвольных римановых поверхностях. Для этого важно выяснить степень метрической определенности римановой поверхности F. Оказывается, что она состоит в наличии на F конформно инвариантной угловой метрики. Пусть $t = f(P)$ однолистная аналитическая функция в окрестности $U(P_0)$ точки $P_0 \in F$. Мы скажем, что простая дуга γ на F имеет в точке P_0 касательную, если соответствующая кривая $f(\gamma)$ на плоскости t имеет касательную в точке $t_0 = f(P_0)$; угол между двумя дугами γ_1, γ_2 на F, имеющими в точке P_0 определенные касательные, определим как угол между соответствующими кривыми $f(\gamma_1)$ и $f(\gamma_2)$ в точке t_0. Из определения 10. 5 ясно, что данное угловое мероопределение на F не зависит от выбора функции $t = f(P)$. Ясно также, что отображение части F с помощью однолистной аналитической функции является конформным, то есть сохраняет углы по величине и направлению. Важно однако и то, что справедливо обратное утверждение, а именно, что из конформности отображения $\tau = \psi(P)$ области $G \subset F$ на плоскую область следует аналитичность $\psi(P)$ в G. Это вытекает из такой теоремы Д. Е. Меньшова [29]:

Если функция $\tau = \chi(t)$ осуществляет однолистное конформное отображение плоской области Δ, то функция $\chi(t)$ является аналитической в Δ.

Теорема Д. Е. Меньшова показывает, что определение 10. 5 римановой поверхности эквивалентно следующему:

Определение 10. 5′. *Римановой поверхностью называется всякая поверхность F, на которой определена угловая метрика, допускающая конформное отображение окрестности каждой точки на круг.*

Вернемся теперь к области D с характеристиками α, β, γ. Рассматривая $\{D; \alpha, \beta, \gamma\}$ как реализацию класса поверхностей $\{S\}$, однолистное отображение которых на D порождает там метрические формы $\{ds^2\}$, которым соответствует одно и то же распределение характеристик, мы, в соответствии с определениями 10. 3 и 10. 4, превращаем поверхности $\{S\}$ в римановы поверхности с угловой метрикой, перенесенной на них с помощью квазиконформного отображения $w = f(z)$ из плоской области $\Delta = f(D)$. Таким образом, мы доказали следующую теорему:

Теорема 10. 4. *Задание в области D распределения характеристик α, β, γ удовлетворяющего условиям существования и единственности квазиконформного отображения, порождает в D неевклидово мероопределение углов, получаемое с помощью квазиконформного отображения $w = f(z)$ области D с характеристиками α, β, γ и превращающее $\{D; \alpha, \beta, \gamma\}$ в риманову поверхность, на которой аналитичность и гармоничность функций совпадает с (α, β, γ)-аналитичностью и (α, β, γ)-гармоничностью в D.*

К этому следует добавить, что указанная угловая метрика в точках аффинности отображения $w = f(z)$, то есть повидимому почти всюду*, совпадает с аффинной угловой метрикой,

* Мы знаем, что $f(z)$ дифференцируема почти всюду. Высказанное предположение эквивалентно тому, что якобиан отображения почти всюду отличен от нуля. Это в свою очередь следует из вероятного предположения о том, что при Q-квазиконформных отображениях множество меры нуль переходит в множество меры нуль.

соответствующей α, β, γ. В условиях теоремы 10.2 такое совпадение угловых метрик имеет место всюду в D. В этом случае, на основании теоремы 3.4, (α, β, γ)-аналитичность функции $\zeta = \varphi(z) = \xi + i\eta$ эквивалентна тому, что функции $\xi(x, y)$, $\eta(x, y)$ дифференцируемы и удовлетворяют уравнениям

$$\alpha\xi_x + \beta\xi_y = \eta_y, \quad \beta\xi_x + \gamma\xi_y = -\eta_x, \tag{1}$$

которые можно рассматривать как обобщенные уравнения Коши-Римана.

В общем случае вопрос о совпадении всюду в D указанных двух угловых метрик еще не решен.

В заключение сделаем замечание еще по одному нерешенному до конца вопросу о том, когда евклидова поверхность S является римановой поверхностью *в своей евклидовой угловой метрике*? Если S кусочно гладка и, подобно поверхностям А. М. Ляпунова, в малом однолистно расположена над своими касательными плоскостями, то, разбивая S на конечное число частей, проектируя их на соответствующие касательные плоскости и устраивая затем подходящее склеивание, получим кусочно гладкое в малом аффинное отображение S на плоскую область D. При этом в D возникает некоторое распределение характеристик α, β, γ и поставленный выше вопрос об S сводится к прежнему вопросу об аффинности угловой метрики римановой поверхности $\{D; \alpha, \beta, \gamma\}$.

10.5. Приведение к каноническому виду дифференциального уравнения второго порядка эллиптического типа. Рассмотрим вопрос о приведении квазилинейного уравнения

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) \tag{1}$$

к каноническому виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = \tilde{F}\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right) \tag{2}$$

посредством замены независимых переменных

$$\xi = \xi(x, y), \quad \eta = \eta(x, y). \tag{3}$$

Относительно A, B, C будем предполагать, что они являются непрерывными функциями от x, y в области D и удовлетворяют условию эллиптичности

$$AC - B^2 > 0; \tag{4}$$

преобразование (3) будем предполагать однолистным и дифференцируемым в D с якобианом $J > 0$. Пусть еще $A > 0$.

Производя замену (3), получим уравнение

$$A_1 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2B_1 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + C_1 \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = F_1, \tag{5}$$

где

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= A\xi_x^2 + 2B\xi_x\xi_y + C\xi_y^2, \\ B_1 &= A\xi_x\eta_x + B(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + C\xi_y\eta_y, \\ C_1 &= A\eta_x^2 + 2B\eta_x\eta_y + C\eta_y^2, \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

откуда следует, что

$$A_1C_1 - B_1^2 = (AC - B^2)J^2. \tag{7}$$

Для определения ξ, η имеем уравнения $A_1 = C_1$, $B_1 = 0$, которые в силу (6) и (7) можно записать в виде

$$\left.\begin{aligned} A\xi_x^2 + 2B\xi_x\xi_\eta + C\xi_y^2 &= \sqrt{AC - B^2}\cdot J, \\ A\xi_x\eta_x + B(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + C\xi_y\eta_y &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Исключая здесь сначала C, затем A, получим эквивалентную (8) систему уравнений

$$\frac{A\xi_x + B\xi_y}{\sqrt{AC - B^2}} = \eta_y, \quad \frac{B\xi_x + C\xi_y}{\sqrt{AC - B^2}} = -\eta_x. \tag{9}$$

Но эти же уравнения получаются при рассмотрении квазиконформного отображения области D с характеристиками α, β, γ, определяемыми в ней метрической формой

$$ds^2 = C\,dx^2 - 2B\,dx\,dy + A\,dy^2. \tag{10}$$

В самом деле, имеем

$$\frac{\gamma}{C} = \frac{-\beta}{-B} = \frac{\alpha}{A} = \frac{1}{\sqrt{AC - B^2}} \tag{11}$$

и известные уравнения

$$\alpha\xi_x + \beta\xi_y = \eta_y, \quad \beta\xi_x + \gamma\xi_y = -\eta_x \tag{12}$$

совпадают с (9).

Таким образом, искомое преобразование (3) является квазиконформным отображением области D с характеристиками α, β, γ, определяемыми из (11). На основании теорем 7.1 и 9.1 получаем следующую теорему:

Теорема 10.5. *Если коэффициенты A, B, C уравнения (1) непрерывны в D, ограничены в D вместе с $\frac{1}{AC - B^2} > 0$ и* *внутри D удовлетворяют интегральному условию Гельдера, то есть интегралы*

$$I_A(z_0) = \iint\limits_D \frac{|A(z) - A(z_0)|}{|z - z_0|^2} dxdy, \; I_B(z_0), \; I_C(z_0), \tag{13}$$

равномерно ограничены для $z_0 \in D_1$, $\overline{D_1} \subset D$, то существует однолистное дифференцируемое отображение (3) области D с положительным якобианом, приводящее уравнение (1) к каноническому виду (2).

Примечание: Можно также сказать, что в условиях теоремы 10. 5 неевклидова метрика (10) превращает D в риманову поверхность, на которой левая часть уравнения (1) представляет „оператор Лапласа", а уравнения (9) определяют „сопряженные гармонические функции" в соответствии с рассмотренной выше основной идеей римановой поверхности*.

10. 6. Теория распределения значений целых и мероморфных функций.** В двадцатых годах нашего столетия финским математиком Р. Неванлинна была построена общая теория распределения значений мероморфных функций, занимающаяся изучением асимптотических свойств распределения на z-плоскости a-точек некоторой мероморфной функции $w = f(z)$.*** Это распределение характеризуется следующими величинами:

$$N(r, a) = \int\limits_0^r \frac{n(t, a) - n(0, a)}{t} dt + n(0, a) \ln r,$$

$$N(r, a) = \int\limits_0^r \frac{n_1(t, a) - n_1(0, a)}{t} dt + n_1(0, a) \ln r,$$

$$m(r, a) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \ln^+ \left| \frac{1}{f(re^{i\varphi}) - a} \right| d\varphi, \; m(r, \infty) =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \ln^+ |f(re^{i\varphi})| \, d\varphi, \text{****}$$

* Уравнение (9) и связанные с ними потенциально-функциональное изучения поверхностей $\{D; ds^2\}$ восходят к Бельтрами (1865). (См. Р. Курант „Геометрическая теория функций комплексного переменного", 1933, гл. IX, § 7).

** Этот пункт написан А. А. Гольдбергом. Тем, кто заинтересуется изложенным, рекомендуем книгу Р. Неванлинна „Однозначные аналитические функции", 1941. Для начала следует прочитать главу VII из книги А. И. Маркушевича „Теория аналитических функций", 1950.

*** То есть корней уравнения $f(z) = a$.

**** $\ln^+ x = \max(\ln x, 0)$, $x > 0$.

где $n(r, a)$ обозначает число a-точек, лежащих в круге $|z| \leqslant r$, а $n_1(r, a)$ — число кратных корней $f(z) - a = 0$, лежащих в том же круге, причем кратный корень считается $k-1$ раз.

Функция $N(r, a)$ характеризует плотность распределения a-точек, $N(r, a) - N_1(r, a)$ — a-точек, считаемых без учета кратности. Функцию $m(r, a)$ можно рассматривать как меру среднего отклонения от a значений функции $f(z)$. Для характеристики плотности распределения a-точек *в среднем* вводится так называемая характеристика функции

$$T(r, f) = \int_0^r \frac{A(t)}{t}\,dt,$$

где $A(t)$ площадь части римановой поверхности F_t, на которую функция $w = f(z)$ отображает круг $|z| < t$, расположенной над сферой с поверхностью равной 1. $T(r; f)$ можно рассматривать как своего рода интегральное среднее число листов F_r. Скорость роста $T(r, f)$ определяет порядок и тип роста $f(z)$.

Следующее соотношение (*первая основная теорема теории распределения значений*):

$$m(r, a) + N(r, a) = T(r, f) + 0 \quad (1)$$

вскрывает замечательную симметрию в приближении $f(z)$ к различным a: инвариантность $m(r, a) + N(r, a)$ относительно a.

Однако, относительная величина $m(r, a)$ и $N(r, a)$ может меняться для различных a, в частности два (но не больше), значения a функция $f(z)$ может совсем не принимать (пикаровские исключительные значения). Эту относительную величину Р. Неванлинна характеризует *дефектом* $f(z)$ над точкой a:

$$\delta(a) = 1 - \overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{N(r, a)}{T(r, f)}$$

и индексом ветвления (коротко: индексом):

$$\varepsilon(a) = \underline{\lim_{r \to \infty}} \frac{N_1(r, a)}{T(r, f)}.$$

Р. Неванлинна показал, что

$$\sum_{(a)} [\delta(a) + \varepsilon(a)] \leqslant 2. \qquad (1)$$

Отсюда следует, что дефект может быть положителен лишь для конечного или счетного множества значений $\{a_i\}$ $(i=1,2,\ldots)$. Эти значения называются дефектными. Соотношение (1) можно рассматривать как обобщение теоремы Пикара, ибо пикаровские исключительные значения имеют дефект равный 1.

Порядок роста мероморфной в $|z|<\infty$ функции $f(z)$ и распределение ее дефектов и индексов тесно связаны с особенностями соответствующей римановой поверхности F. В качестве примера приведем теорему Данжуа-Карлемана-Альфорса*: *целая функция, имеющая* n $(n>1)$ *асимптотических путей***, *имеет порядок роста* $\rho \geqslant \frac{n}{2}$. Изучение этой связи — главная задача теории распределения значений.

Сильным средством здесь оказываются квазиконформные отображения. Вместо конформного отображения римановой поверхности F на конечную z-плоскость (это обычно трудно осуществить), отображают ее квазиконформно на плоскость (так же, как при изучении проблемы типа; см. выше, 10.2). Для изучения распределения значений необходимо, чтобы это квазиконформное отображение асимптотических вело себя, как конформное. Здесь чаще всего используются следующие теоремы:

Теорема Тайхмюллера-Виттиха [22, 23]. *Если конечная ζ-плоскость отображена на конечную z-плоскость почти конформно, то есть квазиконформно с такими характеристиками, что*

$$\iint\limits_{r_0<|z|<\infty} \frac{p(z)-1}{|z|^2}\,dxdy < \infty,$$

то окружность $|\zeta|=r$ *переходит в кривую* $|z|=\gamma r[1+\varepsilon(t)]$, где $\varepsilon(z)$ *равномерно стремится к* 0 *при* $z\to\infty$.

Теорема П. П. Белинского [30]*.* *Каково бы ни было число* $\varepsilon>0$ *и последовательность комплексных чисел* $\{z_n\}$, $z_n\to\infty$, *можно указать такую последовательность положительных чисел* $\{\rho_n\}$, *зависящую только от* ε *и* $\{z_n\}$, *что при отображении конечной z-плоскости на конечную ζ-плоскость таком, что* $p_{\zeta,z}\equiv 1$, *когда* z *лежит вне кругов* $|z-z_n|<\rho_n$ $(n=1,2,\ldots)$, *выполняется неравенство:*

$$|l[\zeta(z)]-z|<\varepsilon,$$

где $l(\zeta)$ — целая линейная функция.

---

* См. например, Г. М. Голузин „Геометрическая теория функций комплексного переменного", 1952, гл. VIII, § 5.

** Т. е. уходящих в ∞ дуг, на которых $f(z)$ стремится к определенному пределу.

*** Приводим в несколько ослабленной формулировке.

Отображения, указанные в этих теоремах, позволяют для широких классов функций производить подсчет a-точек вместо z-плоскости на ζ-плоскости.

Использовав почти конформные отображения, вьетнамский математик Ле Ван Тьем в своих работах [31, 32] добился существенного прогресса в решении долго не продвигавшейся обратной задачи теории распределения значений, заключающейся в построении по заданному распределению дефектов и индексов такому, что $\sum [\delta(a) + \varepsilon(a)] = 2$, мероморфной функции конечного порядка, принимающей над заданными точками заданные дефекты и индексы. Результаты Ле Ван Тьема были обобщены его же методом в работе [33], где в предположении, что дефекты положительны над конечным числом точек, была решена полностью обратная задача для целых функций и, за исключением одного частного случая, для мероморфных функций.

Остается не доказанной выдвинутая 25 лет назад гипотеза Р. Неванлинна, утверждающая конечность числа дефектных значений для целых функций конечного порядка.

Значение теоремы П. П. Белинского для исследования распределения значений состоит в том, что она позволяет прикреплять к римановой поверхности по узким „перешейкам" конечнолистные куски римановых поверхностей и тем самым значительно изменять $N(r, a)$, не изменяя существенно $m(r, a)$ и картины отображения в целом. Это обстоятельство было использовано в работе [30] для построения мероморфной функции максимального типа первого порядка, у которой $\delta[a, f(z)] \neq \delta[a, f(z+h)]$, то есть дефект меняется в зависимости от выбора начала координат. Этим было показано, что достаточное условие для $\delta[a, f(z)] = \delta[a, f(z+h)]$, данное в [34] : $f(z)$ должна иметь порядок роста не выше среднего типа первого порядка — не может быть расширено. В [30] дано достаточное условие для того, чтобы дефект не менялся при почти конформном отображении z-плоскости:

$$0 < \frac{1}{K} < \frac{T(r, f)}{r^{\alpha}} < K,$$

и показано, что оно не может быть ослаблено.

В заключение отметим применение квазиконформных отображений для исследования вопроса о влиянии алгебраических точек ветвления одного частного класса римановых поверхностей на порядок роста отображающей функции (см. [35]).

ЦИТИРОВАННАЯ ЖУРНАЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Lavrentieff M. Sur une classe de représentations continues. Матем. сб., 42, 1935, 407—424.

2. Шабат Б. В. Об обобщенных решениях одной системы уравнений в частных производных. Матем. сб., 17(59), 1945, 193—210.

3. Шапиро З. Я. О существовании квазиконформных отображений. ДАН СССР, 30, 1941, 685—687.

4. Лаврентьев М. А. Общая теория квазиконфорных отображений плоских областей. Матем. сб., 21(63), 1947, 285—320.

5. Лаврентьев М. А. Основная теорема теории квазиконформных отображений плоских областей. Известия АН СССР, сер. матем., 12, 1948, 513—554.

6. Menchoff D. Sur une généralisation d'un thérèome de M. H. Bohr. Матем сб., 2(44), 1937, 339—356.

7. Маркушевич А. И. О некоторых классах непрерывных отображений. ДАН СССР, 20, 1940, 301—304.

8. Stepanoff V. Über totale Differenzierbarkeit. Math. Annalen, 90, 1923, 318—320,

9. Stepanoff V. Sur les conditions de l'existance de la differentielle totale. Матем. сб., 32, 1925, 511—527.

10. Menchoff D. Les conditions de monogénéité. Paris, 1936.

11. de la Vallée-Poussin. Sur l'integrale de Lebesgue. Trans. Am. Math. Soc., 16, 1915.

12. Голубев В. В. Однозначные аналитические функции с совершенным множеством особых точек (диссертация), 1916.

13. Штейнберг Н. С. Об условиях, достаточных для моногенности функции комплексного переменного. Матем. сб., 17(59), 1945, 39—58.

14. Bohr H. Über streckentreue und konforme Abbildung. Math Zeitschr., 1 (1918), 403—420.

15. Hopf E. Zum analytischen Charakter des Lösungen regulärer zwei dimensionaler Variations probleme. Math. Zeitschr., 30, 1929, 404 — 413.

16. Hopf E. Über den funktionalen Charakter der Lösungen elliptischer Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Math. Zeitschr., 34, 1931, 194—233.

17. Феллер В. О решениях линейных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка эллиптического типа. УМН, вып. VIII, 1941, 232—248 (перевод с немецкого).

18. Леви Е. Е. О линейных эллиптических дифференциальных уравнениях в частных производных. УМН, вып. VIII, 1941, 249—292 (перевод с итальянского).

19. Лопатинский Я. Б. Фундаментальная система решений эллиптической системы линейных дифференциальных уравнений. Украинский матем. журнал, III, 1951, 3—37.

20. Волковыский Л. И. О дифференцируемости квазиконформного отображения. Львов, Научные записки университета (в печати).

21. Белинский П. П. Поведение квазиконформного отображения в изолированной точке. ДАН СССР, XCI, № 4, 1953.

22. Teichmüller O. Untersuchungen über konforme und quasikonforme Abbildung. Deutsche Math., 3, 1938, 620—678.

23. W i t t i c h H. Zum Beweis eines Satzes über quasikonforme Abbildungen. Math. Zeitschr., 51, 1948, 278 288.

24. Л а в р е н т ь е в М. А. Теория квазиконформных отображении. Юбилейный сб. АН СССР, 1947, ч. 1, 95 — 113.

25. Б е л и н с к и й П. П. Об искажении при квазиконформных отображениях. ДАН СССР, XCI, № 5, 1953.

26. Б е л и н с к и й П. П. Теорема существования и единственности квазиконформных отображений. УМН VI, 2 (42), 1951, 145.

27. В о л к о в ы с к и й Л. И. Квазиконформные отображения и задачи на конформное склеивание. Украинский матем. журнал, III, 1951, 39 — 51.

28. В о л к о в ы с к и й Л И. Исследования по проблеме типа односвязной римановой поверхности. Труды матем. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР, XXXIV, 1950, 1 — 171.

29. M e n c h o f f D. Sur la représentations conforme des domaines plans. Math. Annalen, 95, 1926, 640 — 670.

30. Б е л и н с к и й П. П. и Г о л ь д б е р г А. А. Применение одной теоремы о конформиых отображениях к вопросам инвариантности дефектов мероморфных функций, Украинский матем. журнал (в печати).

31. L e V a n T h i e m. Über das Umkehrproblem der Wertverteilungslehre. Comment. math. Helv., 23, 1949, 28 — 49.

32. L e V a n T h i e m. Sur un problème d'inversion dans la théorie des fonctions méromorphes. Ann. Sci. École Norm Sup. (3), 67, 1950, 51 — 98.

33. Г о л ь д б е р г А. А. 1) Про одну задачу в теорії розподілу значень мероморфних функцій. ДАН УРСР, 1954, № 1. 2) К обратной задаче в теории распределения значений мероморфных функций, Украинский матем. журнал (в печати).

34. V a l i r o n G. Valeurs exceptionnelles et valeurs déficientes des fonctions méromorphes. C. R. Acad. Sci. Paris, 225, 1947, 556 — 558.

35. W i t t i c h H. Über den Einfluss algebraischer Windungspunkte auf die Wachstumsordnung. Math. Annalen, 122, 1950, 37 — 46.

ПРИЛОЖЕНИЕ

В настоящем приложении собраны дополнительные сведения из разных разделов математики, не входящие полностью в программы соответствующих учебных дисциплин, изучаемых в университете, но необходимые при изучении теории квазиконформных отображений. Для удобства читателя часть результатов, разбросанных по разным журналам, мы приводим с доказательствами.

§ 1. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ ПО ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО ПЕРЕМЕННОГО

1. 1. Теорема Витали. В своей общей формулировке теорема Витали читается так:

Пусть E произвольное множество n-мерного пространства с конечной внешней мерой m^*E. Пусть далее каждой точке $P \in E$ поставлена в соответствие последовательность замкнутых множеств $\{\sigma_k(P)\}$ $(k=1, 2, \ldots)$ таких, что:

1°. $\sigma_k(P)$ лежит внутри n-мерного куба $W_k(P)$ с центром в точке P и стороной $a_k(P) \to 0$ при $k \to \infty$;

2°. Существует такая постоянная $\alpha(P)$, что

$$\frac{m\sigma_k(P)}{mW_k(P)} > \alpha(P).$$

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется конечное число множеств $\sigma_i = \sigma_{ki}(P_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, s)$ попарно без общих точек, что

$$m^*\left(E - E \cdot \sum_{i=1}^{s} \sigma_i\right) < \varepsilon\, m^*E \tag{1}$$

или

$$m^*\left(E \cdot \sum_{i=1}^{s} \sigma_i\right) > (1-\varepsilon)\, m^*E. \tag{2}$$

Некоторые замечания.

1) Покрытие $\{\sigma_k(P)\}$ множества E, обладающее свойствами

1°, 2°, называется *покрытием Витали.* При этом точка P не обязательно принадлежит $\sigma_k(P)$.

2) Соотношения (1), (2) эквивалентны между собой. В приложениях наиболее часто σ_i выбирают так, чтобы

$$m\left(\sum_{i=1}^{s} \sigma_i\right) > \frac{1}{2} m^* E. \tag{3}$$

3) Вместо „ε-исчерпания" множества E можно устроить полное по мере его исчерпание, используя возможно счетное число множеств σ_i:

$$m\left(E \cdot \sum_{(i)} \sigma_i\right) = m^* E. \tag{4}$$

4) Обычно $\sigma_k(P)$ совпадает с шаром или кубом с центром в точке P. От этого случая мало отличается другой, когда существует такая постоянная $\alpha > 0$, что для всех $P \in E$ величина $\alpha(P) > \alpha$. С использованием теоремы Витали в таком случае встречаемся при рассмотрении Q-квазиконформных отображений (см. выше, 4. 1). Как видно из общей формулировки теоремы Витали, существование указанной постоянной α не обязательно. Более общий случай, когда

$$\lim \frac{m\sigma_k(P)}{mW_k(P)} = 0,$$

до конца не исследован.

Литература к I. 1. Линейный и плоский случай (с кругами) см. в книге [3], гл. III, § 8 или [2], п. 85; общий — в книге [3], гл. IV, § 3; Приведенная формулировка и некоторые замечания взяты из [4], § 288.

I. 2. Теорема Лузина-Данжуа. Если функция $f(x)$ определена в окрестности точки x_0, то четыре числа, конечные или нет, равные соответственно верхнему и нижнему пределу отношения

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

когда $x \to x_0$ слева или только справа, называются *производными числами* $f(x)$ в точке x_0.

Н. Н. Лузину ([5], п. 59) и Данжуа [6] принадлежит следующая теорема:

Пусть $f(x)$ функция, определенная на интервале (a, b). Если в каждой точке измеримого множества $E \subset (a, b)$ все четыре производные числа $f(x)$ конечны, то почти в каждой точке множества E существует производная $f'(x)$.

1. 3. Теорема Фубини (см. [1] или [2]). *Пусть функция $f(x, y)$ суммируема на плоском множестве E, ограниченном или нет. Тогда почти для всех y функция $f(x, y)$ суммируема по x, интеграл $\int f(x, y)\,dx$ суммируем по y и*

$$\iint_E f(x, y)\,dxdy = \int dy \int f(x, y)\,dx.$$

Точно также почти для всех x функция $f(x, y)$ суммируема по y, интеграл $\int f(x, y)dy$ суммируем по x и

$$\iint_E f(x, y)\,dxdy = \int dx \int f(x, y)dy.$$

Итак, *существование двойного интеграла $\iint f(x, y)\,dxdy$ влечет за собой существование обоих повторных интегралов $\int dy \int f(x, y)dx$, $\int dx \int f(x, y)dy$ и совпадение всех трех:*

$$\iint f(x, y)dxdy = \int dy \int f(x, y)dx = \int dx \int f(x, y)dy. \qquad (1)$$

В частности, принимая за $f(x, y)$ характеристическую функцию множества E, получаем соотношение

$$mF = \int \operatorname{mes}(E, y)\,dy = \int \operatorname{mes}(E, x)dx, \qquad (2)$$

где (E, x) и (E, y) означают сечения E прямыми $x = \text{const}$, соответственно $y = \text{const}$ и mes означает линейную меру.

Следствие. Если $mE = 0$, то почти для всех x $\operatorname{mes}(E, x) = 0$ и почти для всех y $\operatorname{mes}(E, y) = 0$.

Справедливо следующее обращение теоремы Фубини (см. [1], стр. 302), называемое также теоремой Тонелли:

Если функция $f(x, y) \geqslant 0$ и измерима на плоском множестве E, то из конечности одного из повторных интегралов $f(x, y)$ следует суммируемость $f(x, y)$, а, следовательно, по теореме Фубини, существование другого повторного интеграла и совпадение всех трех.

Без дополнительных ограничений на $f(x, y)$ обращение теоремы Фубини, вообще говоря, несправедливо.

Следствие из теоремы Тонелли. Если плоское множество E таково, что почти для всех x $\operatorname{mes}(E, x) = 0$, то, либо множество E измеримо и тогда, рассматривая его характеристическую функцию, заключаем на основании теоремы Тонелли, что $mE = 0$, либо множество E неизмеримо.

Последний случай действительно возможен, как это видно из одного примера Серпинского. Именно им было построено неизмеримое плоское множество, расположенное в квадрате, со сторонами параллельными координатным осям, которые с каждым сечением квадрата прямой, параллельной любой из координатных осей, имеет ровно одну общую точку [см. [7]). Интересна характеристическая функция этого множества: будучи определенной на неизмеримом множестве она неизмерима, в то же время линейно она измерима на всех сечениях (E, x) и (E, y).

1. 4. N-свойство непрерывных функций. Как показал Н. Н. Лузин для изучения метрических свойств непрерывных функций важное значение имеет понятие N-свойства ([5], п 47): *функция $f(x)$, непрерывная на сегменте $[a, b]$, обладает на нем N-свойством, если она всякое множество меры нуль переводит в множество меры нуль.* Введя это определение, Н. Н. Лузин далее показал, что отрицание N-свойства приводит к существованию на $[a, b]$ такого совершенного множества π меры нуль, любая порция которого (то есть замыкание пересечения π с любым интервалом $(\alpha, \beta) \subseteq [a, b]$) преобразуется в множество положительной меры. Отсюда, в частности, следует, что в определении N-свойства можно вместо произвольных множеств меры нуль говорить лишь о совершенных множествах меры нуль.

I. 5. Теорема Д. Е. Меньшова об абсолютно непрерывных функциях. Относительно абсолютно непрерывных функции и их отношения к N-свойству читателю рекомендуется посмотреть книгу [1], гл. IX, §§ 1, 3 Здесь мы приведем нужную нам теорему Д. Е. Меньшова [8], которую формулируем так:

Для того чтобы непрерывная функция $f(x)$ была абсолютно непрерывна на сегменте $[a, b]$ необходимо и достаточно, чтобы она обладала N-свойством и имела почти всюду на $[a, b]$ суммируемую производную.

Необходимость условия хорошо известна, все дело в его достаточности. Приводимое ниже доказательство взято нами непосредственно из указанной работы Д. Е. Меньшова.

Прежде всего Д. Е. Меньшов замечает, что достаточно доказать такую лемму: *если непрерывная функция $\psi(x) \neq \text{const}$ имеет почти всюду на (a, b) производную, равную нулю, и если функция $\varphi(x)$ абсолютно непрерывна на $[a, b]$, то сумма $\varphi(x) + \psi(x)$ не обладает N-свойством на $[a, b]$.* В самом деле, если $f(x)$ удовлетворяет условиям теоремы Д. Е. Меньшова, то функция $\varphi(x) = \int\limits_a^x f'(x)dx$ абсолютно непрерывна на $[a, b]$ и $\varphi'(x) = f'(x)$ почти всюду. Если теперь функция $\psi(x) = f(x) - \varphi(x) \neq \text{const}$, то она удовлетворяет условиям леммы, поэтому функция $f(x) = \varphi(x) + \psi(x)$ не обладает на $[a, b]$ N-свойством, что ведет к противоречию. Следовательно, $f(x) - \varphi(x) \equiv \text{const}$, откуда следует абсолютная непрерывность $f(x)$.

Далее Д. Е. Меньшов доказывает только что указанную лемму.

Пусть E множество точек $x \in [a, b]$, где $\psi'(x) = 0$. По условию

$$\text{mes}\, E = b - a, \quad (b > a). \tag{1}$$

Пусть M и m наибольшее и наименьшее значение $\varphi(x)$ на $[a, b]$. Тогда

$$V_{(a, b)}\psi(x) = M - m > 0, \tag{2}$$

где слева - колебание $\psi(x)$ на (a, b).

Полагая

$$\sigma = \frac{M-m}{4(b-a)}, \quad \Delta(x, h) = (x-h, \ x+h), \ h > 0 \tag{3}$$

и учитывая определение множества E, имеем

$$V_{\Delta(x, h)}\, \psi(x) < \sigma \cdot 2h \tag{4}$$

во всех точках E и для всех положительных значений h, меньших некоторого положительного числа η_x, зависящего вообще от x. Число η_x возьмем еще настолько малым, чтобы $\Delta(x, h) \subset (a, b)$.

Пусть S система всех замкнутых интервалов $\Delta(x, h)$, $0 < h < \eta_x$, $x \in E$. По теореме Витали из S можно выбрать счетную систему сегментов $[a_s, b_s]$ $(s = 1, 2, \ldots)$, лежащих вне друг друга и покрывающих почти все множество E.

На основании (4) и (1) имеем

$$V_{(a_s, b_s)}\, \psi(x) < \sigma(b_s - a_s) \quad (s = 1, 2, \ldots), \tag{5}$$

$$\sum_{s=1}^{\infty} (b_s - a_s) = b - a. \tag{6}$$

Обозначая через G замкнутое множество, дополнительное к совокупности интегралов (a_s, b_s), заключаем, на основании (6), что

$$\text{mes}\, G = 0 \tag{7}$$

(дальше будет указана часть G_i множества G, образ которой при отображении посредством функции $f(x) = \varphi(x) + \psi(x)$ имеет положительную меру и лемма будет доказана).

Удалим из (a, b) n первых интервалов (a_s, b_s), $1 \leqslant s \leqslant n$ и обозначим через $[c_i, d_i]$, $1 \leqslant i \leqslant n+1$ оставшиеся сегменты. В силу (7) имеем

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{s=n+1}^{\infty} (b_s - a_s) = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n+1} (d_i - c_i) = 0.$$

Так как функция $\varphi(x)$ абсолютно непрерывна, то можно определить значение n так, что

$$\sum_{i=1}^{n+1} V_{(c_i, d_i)} \varphi(x) < \frac{M-m}{4}, \quad \sum_{s=n+1}^{\infty} V_{(a_s, b_s)} \varphi(x) < \frac{M-m}{4} \tag{8}$$

и

$$\sigma \cdot \sum_{i=1}^{n+1} (d_i - c_i) < \frac{M-m}{4}. \tag{9}$$

В силу (5), (6) и (3)

$$\sum_{s} V_{(a_s, b_s)} \psi(x) < \frac{M-m}{4}, \tag{10}$$

следовательно,

$$M - m = V_{(a, b)} \psi(x) \leqslant \sum_{s=1}^{n} V_{(a_s, b_s)} \psi(x) + \sum_{i=1}^{n+1} V_{(c_i, d_i)} \psi(x) <$$

$$< \frac{M-m}{4} + \sum_{i=1}^{n+1} V_{(c_i, d_i)} \psi(x),$$

откуда

$$\frac{3}{4}(M-m) < \sum_{i=1}^{n+1} V_{(c_i, d_i)} \psi(x). \tag{11}$$

Полагая

$$\varphi(x) + \psi(x) = f(x),$$

имеем

$$V_{(c_i, d_i)} \psi(x) - V_{(c_i, d_i)} \varphi(x) \leqslant V_{(c_i, d_i)} f(x).$$

Следовательно, в силу (11) и (8),

$$\frac{1}{2}(M-m) < \sum V_{(c_i, d_i)} f(x). \tag{12}$$

С другой стороны,

$$V_{(a_s, b_s)} f(x) \leqslant V_{(a_s, b_s)} \varphi(x) + V_{(a_s, b_s)} \psi(x). \tag{13}$$

Условимся через $\sum'$ обозначать суммирование, распространенное на все те индексы s, для которых интервалы (a_s, b_s) принадлежат сегментам $[c_i, d_i]$. В силу (5)

$$\sum' V_{(a_s, b_s)} \psi(x) < \sigma(d_i - c_i),$$

откуда, в силу (9),

$$\sum_{i=1}^{n-1} \sum' V_{(a_s, b_s)} \psi(x) < \frac{M-m}{4}. \tag{14}$$

Кроме того, благодаря второму из неравенств (8), имеем

$$\sum_{i=1}^{n-1} \sum' V_{(a_s, b_s)} \varphi(x) < \frac{M-m}{4}. \tag{15}$$

Комбинируя неравенства (13), (14) и (15), получаем

$$\sum_{i=1}^{n-1} \sum' V_{(a_s, b_s)} f(x) < \frac{M-m}{2}$$

и, в силу (12),

$$\sum_{i=1}^{n-1} \left[V_{(c_i, d_i)} f(x) - \sum' V_{(a_s, b_s)} f(x) \right] > 0.$$

Следовательно, можно указать такое определенное значение i, что

$$\sum' V_{(a_s, b_s)} f(x) < V_{(c_i, d_i)} f(x). \tag{16}$$

Пусть G_i часть множества G, заключенная в сегменте $[c_i, d_i]$; на основании (7)

$$\text{mes}\, G_i = 0.$$

Обозначим через Q_i, H_i и Q_i' множества значений $f(x)$ для x, принадлежащих соответственно $[c_i, d_i]$, (a_s, b_s) и G_i. Тогда очевидно

$$Q_i = Q_i' + \sum' H_s,$$

откуда

$$\operatorname{mes} Q_i - \sum\nolimits' \operatorname{mes} H_s < \operatorname{mes} Q_i'. \tag{18}$$

Так как функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то можно написать

$$\operatorname{mes} Q_i = V_{(c_i, d_i)} f(x),$$

$$\operatorname{mes} H_s = V_{(a_s, b_s)} f(x).$$

Комбинируя эти соотношения с (16) и (18), получаем

$$\operatorname{mes} Q_i' > 0 \tag{19}$$

Из (17) и (19) и определения множества Q_i' следует, что функция $f(x) = \varphi(x) + \psi(x)$ не обладает N-свойством на $[a, b]$, чем заканчивается доказательство леммы, следовательно, и теоремы Д. Е. Меньшова

Примечание. Обратим внимание читателя на обширный мемуар Н. К. Бари [9], в первой части которого дается обобщение теоремы Д. Е. Меньшова. Доказательство Н. К. Бари не опирается на теорему Д. Е. Меньшова, но связано с рядом других теорем и понятий.

1. 6. Множества первой и второй категории (см. [10], гл. IV, § 7 и [3], гл. II, § 9).

Определение 1. *Множество, являющееся суммой счетного числа замкнутых множеств, называется множеством типа F_σ; множество, являющееся пересечением счетного числа открытых множеств, называется множеством типа G_δ.*

Справедливо такое утверждение: *всякое открытое множество и, более обще, дополнение к множеству G_δ, есть множество F_σ; обратно, всякое замкнутое множество и, более обще, дополнение к множеству F_σ, есть множество G_δ.*

Определение 2. *Пусть R произвольное замкнутое множество. Множество $E \subset R$ называется первой категории на R, если оно может быть представлено в виде счетного числа нигде не плотных на R множеств. Множество $E \subset R$ называется второй категории на R, если его дополнение $R \setminus E$ есть множество первой категории на R.*

Имеет место следующая теорема:

Теорема Бэра. *В полном пространстве всякое непустое множество G_δ (в частности всякое замкнутое множество) является множеством второй категории на самом себе, то* *есть, если E такое множество и $E=\sum_{n=1}^{\infty} E_n$, то, по крайней мере, одно из множеств E_n всюду плотно на некоторой порции множества E.*

§ 2. ИЗ ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

2. 1. Эллиптический тип некоторых дифференциальных уравнений в частных производных (см. [11], гл. III, §§ 3, 4 и [12], гл. 1, §§ 3, 5).

1°. Уравнение

$$\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial y_k} + \ldots = 0, \tag{1}$$

где коэффициенты a_{ik} и функция u зависят от $x_1, x_2, \ldots, x_n$; $a_{ik}=a_{ki}$ и многоточие означает члены низшего порядка, не обязательно линейные, называется *эллиптического типа в области* Ω, если для всех точек $(x_1, \ldots, x_n) \in \Omega$ квадратичная форма

$$Q[y] = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} y_i y_k \tag{2}$$

является положительно определенной, то есть $\geqslant 0$ с равенством только для $y_1 = y_2 = \ldots = y_n = 0$.

2°. Уравнение

$$\sum_{i_1+\ldots+i_n=k} a_{i_1\ldots i_n} \frac{\partial^k u}{\partial x_1^{i_1}\ldots \partial x_n^{i_n}} + \ldots = 0 \tag{3}$$

называется эллиптического типа, если характеристическая форма

$$C[y] = \sum_{i_1+\ldots+i_n=k} a_{i_1\ldots i_n} y_1^{i_1}\ldots y_n^{i_n} \tag{4}$$

является положительно определенной.

3°. Система уравнений

$$\left.\begin{array}{l} L_{11} u_1 + \ldots + L_{1m} u_m = g_1, \\ L_{21} u_1 + \ldots + L_{2m} u_m = g_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ L_{m1} u_1 + \ldots + L_{mm} u_m = g_m, \end{array}\right\} \tag{5}$$

где $u_1, \ldots, u_m$; $g_1, \ldots g_m$ фуикции $x_1, \ldots x_n$ и L_{ik} дифференциальные операторы

$$\left.\begin{aligned} L_{ik}[u] &= \sum_{r=1}^{n} a_{ik}^r \frac{\partial u}{\partial x_r}, \\ L_{ik} &= \sum_{r=1}^{n} a_{ik}^r D, \quad D = \frac{\partial}{\partial x_r}, \end{aligned}\right| \tag{6}$$

с коэффициентами, зависящими от $x_1, \ldots, x_n$, называется эллиптического типа, если соответствующая характеристическая форма

$$C[y] = \begin{vmatrix} C_{11}[y] \, C_{12}[y] \ldots C_{1m}[y] \\ C_{21}[y] \, C_{22}[y] \ldots C_{2m}[y] \\ \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \\ \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \\ C_{m1}[y] \, C_{m2}[y] \ldots C_{mm}[y] \end{vmatrix}, \quad C_{ik}[y] = \sum_{r=1}^{n} a_{ik}^r y_r \tag{7}$$

является положительно определенной.

Примечание. Если коэффициенты системы (5) постоянные, то исключение $m-1$ неизвестных функций приводит к уравнениям m-го порядка с одинаковой главной частью, определяемой оператором $L = \| L_{ik} \|$ (формальный определитель системы (5), который при замене операций дифференцирования $\frac{\partial}{\partial x_r}$ $(r = 1, 2, \ldots, n)$ на переменные y_r превращается в характеристическую форму (7)).

Пример. Системе

$$\begin{aligned} a u_x + b u_y - v_y &= 0 \\ d u_x + c u_y + v_x &= 0 \end{aligned}$$

соответствует характеристическая форма

$$C[y] = \begin{vmatrix} a y_1 + b y_2 - y_2 \\ d u_1 + c u_2 \quad y_1 \end{vmatrix} = a y_1^2 + (b+d) y_1 y_2 + c y_2^2,$$

которая является положительно определенной, если

$$A = ac - \left(\frac{b+d}{2}\right)^2 > 0;$$

это же является условием эллиптичности указанной системы.

4°. Уравнение

$$\Phi\left(x_1, \ldots, x_n;\, u;\, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots \frac{\partial u}{\partial x_n}; \ldots \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k}, \ldots\right) = 0 \tag{8}$$

называется эллиптического типа, если квадратическая форма

$$Q[y] = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} y_i y_k, \quad a_{ik} = \frac{\partial \Phi}{\partial\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k}\right)} \tag{9}$$

является положительно определенной.

5°. Система

$$\Phi_1\left(x, y;\, u, v;\, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}\right) = 0$$
$$\Phi_2\left(x, y;\, u, v;\, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}\right) = 0 \tag{10}$$

называется эллиптического типа, если квадратическая форма

$$Q[y] = \begin{vmatrix} a_{11} y_1 + a_{12} y_2 & b_{11} y_1 + b_{12} y_2 \\ a_{21} y_1 + a_{22} y_2 & b_{21} y_1 + b_{22} y_2 \end{vmatrix}, \tag{11}$$

где

$$a_{11} = \frac{\partial \Phi_1}{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)}, \quad a_{12} = \frac{\partial \Phi_1}{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)},$$
$$a_{21} = \frac{\partial \Phi_2}{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)}, \ldots, \quad b_{22} = \frac{\partial \Phi_2}{\partial\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)} \tag{12}$$

является положительно определенной.

2. 2. Сопряженные линейные дифференциальные операторы (см. [13], гл. V, § 4 и [14], гл. V, § 2).

1°. Два линейных дифференциальных оператора

$$\left.\begin{aligned} L[y] &= a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y, \\ M[z] &= b_0 z^{(n)} + b_1 z^{(n-1)} + \ldots + b_{n-1} z' + b_n z, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

где y, z и коэффициенты зависят от x, называются сопряженными друг к другу, если имеет место соотношение

$$z\,L[y] - y M[z] = \frac{d}{dx} B[y, z], \tag{2}$$

где $B[y, z]$ билинейный дифференциальный оператор от y, z порядка $n-1$. Имеем

$$M[z] = a_n z - (a_{n-1} z)' + \ldots (-1)^{n-1} (a, z)^{n-1} + (-1)^n (a_0 z)^{(n)},$$

$$B[y, z] = y\,\{a_{n-1} z - (a_{n-2} z)' + \ldots (-1)^{n-1} (a_0 z)^{(n-1)}\} +$$
$$+ y'\,\{a_{n-2} z - (a_{n-3} z)' + \ldots + (-1)^{n-2} (a_0 z)^{n-2}\} +$$
$$+ \ldots + y^{n-1} a_0 z. \tag{3}$$

Если $L \equiv M$, то оператор L и уравнение $L[y] = 0$ называются самосопряженными.

2°. Два линейных дифференциальных оператора

$$\left.\begin{aligned} L[u] &= \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu, \\ M[v] &= \sum_{i,k=1}^{n} \alpha_{ik} \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_k} + \sum_{i=1}^{n} \beta_i \frac{\partial v}{\partial x_i} + \gamma v \end{aligned}\right| \tag{4}$$

называются сопряженными друг к другу, если имеет место соотношение

$$v L[u] - u M[v] = div \overrightarrow{P} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial P_i}{\partial x_i}, \tag{5}$$

где $P_i = P_i[u, v]$ билинейные дифференциальные операторы 1-го порядка относительно u, v. Имеем

$$\left.\begin{aligned} M[v] &= \sum_{i,k=1}^{n} \frac{\partial^2 (a_{ik} v)}{\partial x_i \partial x_k} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial (b_i v)}{\partial x_i} + cv, \\ P_i[u, v] &= \sum_{k=1}^{n} \left\{ v a_{ik} \frac{\partial u}{\partial x_k} - u \frac{\partial (a_{ik} v)}{\partial x_k} \right\} + b_i uv. \end{aligned}\right| \tag{6}$$

Из (5) следует формула Грина

$$\iint\limits_{\Omega} \ldots \int \{vL[u] - uM[v]\}\, d\tau = \int\limits_{S} \ldots \int \sum_{i=1}^{n} P_i \cos(\nu, x_i)\, d\sigma, \tag{7}$$

где Ω — область изменения $(x_1, \ldots x_n)$, S — ее граница, $d\tau$ — элемент объема (n-мерный), $d\sigma$ — элемент площади ($n-1$-мерный) и ν — направление внешней нормали.

Если $L \equiv M$, то оператор L и уравнение $L[y] = 0$ называются самосопряженными. Так например, самосопряженным является дифференциальный оператор $L[u] = (pu_x)_x + (pu_y)_y - qu$, встречающийся в краевой задаче Штурма-Лиувилля для случая двух независимых переменных.

§ 3. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ ПО ТЕОРИИ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ *

3. 1. Лемма Шварца и принцип Линделёфа.

Лемма Шварца. *Если функция $f(z)$ аналитическая в круге $|z| < 1$ и удовлетворяет условиям*

$$|f(z)| < 1, \quad f(0) = 0, \tag{1}$$

то

$$|f(z)| \leqslant |z| \text{ и } |f'(0)| \leqslant 1, \tag{2}$$

причем равенство справа или хотя бы в одной точке z слева возможно только для линейной функции $f(z) = e^{i\alpha}z$.

Принцип Линделёфа. *Пусть функции $w = f(z)$ и $w = f_1(z)$ отображают конформно круг $|z| < 1$ соответственно на односвязные области G и G', причем $G \subset G'$ (включение строгое в том смысле, что G' содержит точки, не принадлежащие G) и $f(0) = f_1(0)$. Тогда для областей G_r и G_r', ограниченных линиями γ_r и γ_r', соответствующими окружности $|z| = r$, $0 < r < 1$ выполняется соотношение*

$$G_r \subset G_r' \tag{3}$$

и

$$|f'(0)| < |f_1'(0)|. \tag{4}$$

Величина $|f'(0)|$ называется *конформным радиусом области G в точке $f(0)$*. Из принципа Линделёфа следует, что *при расширении области конформный радиус увеличивается*. Отметим еще такое следствие: если $z = \varphi(w)$ и $z = \varphi_1(w)$ функции, обратные к $f(z)$ и $f_1(z)$ соответственно, то из (4) для точек $z \in G$, $z \neq 0$ следует, что

$$|\varphi_1(w)| < |\varphi(w)| \tag{5}$$

то есть *при расширении области прообраз соответствующих точек в единичном круге приближается к началу.*

3. 2. Принцип сходимости и теорема Римана.

Определение 3. 1. *Семейство функций $\{f(z)\}$ называется равностепенно непрерывным в области G, если для*

---

* Литература указана в конце раздела.

всякого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta = \delta(\varepsilon)$, что для всяких двух точек z', $z'' \in G$, $|z' - z''| < \delta$ и любой функции $f(z)$ семейства выполняется неравенство

$$|f(z') - f(z'')| < \varepsilon. \tag{1}$$

Определение 3.2. *Семейство функций $\{f(z)\}$ называется равномерно ограниченным в области G, если существует такое число $M > 0$, что для всех точек $z \in G$ и любой функции $f(z)$ семейства выполняется неравенство*

$$|f(z)| \leqslant M. \tag{2}$$

Теорема Арцела. *Семейство функций $\{f(z)\}$, равномерно ограниченных и равностепенно непрерывных в области G, компактно: из всякой бесконечной последовательности функций $\{f_n(z)\}$ $(n = 1, 2, \dots)$ семейства можно выделить равномерно сходящуюся подпоследовательность $\{f_{n_k}(z)\}$ $(k = 1, 2, \dots)$.* Предельная функция $f(z) = \lim\limits_{k\to\infty} f_{n_k}(z)$ принадлежит к тому же семейству.

Теорема Монтеля (принцип сходимости аналитических функций). *Семейство функций $\{f(z)\}$, аналитических и равномерно ограниченных в области G, компактно; из всякой бесконечной последовательности таких функций можно выделить подпоследовательность, равномерно сходящуюся внутри области G, то есть во всякой замкнутой ее подобласти.* По известной теореме Вейерштрасса предельная функция также аналитична в области G и очевидно ограничена той же гранью, что и функции семейства.

Доказательство этой теоремы основывается на том, что для аналитических функций из равномерной их ограниченности внутри некоторой области вытекает равностепенная их непрерывность во всякой замкнутой подобласти, что позволяет применить теорему Арцела, после чего уже нетрудно получить теорему Монтеля.

Теорема Монтеля позволяет наиболее просто доказать основную теорему о конформных отображениях, принадлежащую Риману.

Теорема Римана. *Всякую односвязную область G, отличную от всей расширенной плоскости и от плоскости с одной выколотой точкой, можно взаимно однозначно и конформно отобразить на круг $|z| < 1$, притом единственным образом, если потребовать, чтобы для фиксированной точки w_0 области G*

$$f(w_0) = 0 \text{ и } f'(w_0) > 0. \tag{3}$$

Примечание. Последнее утверждение теоремы Римана легко доказывается с помощью леммы Шварца.

Условие единственности (3) можно заменить следующим:

$$f(w_k) = z_k \qquad k = (1, 2, 3),$$

где z_k и w_k произвольные заданные точки на окружности $|z| = 1$, соответственно на границе области G.

3. 3. Соответствие границ при конформных отображениях.

Теорема 3. 1. *При конформном отображении жордановой области на круг, отображение взаимно однозначно и непрерывно до границы включительно.*

Примечание. Указанная теорема является частным случаем более общей теоремы о соответствии границ, относящейся к достижимым граничным точкам области, то есть таким ее граничным точкам, которые являются концами жордановых дуг, расположенных целиком, исключая один их конец, внутри области. Для жордановой области все ее граничные точки достижимы как изнутри, так и снаружи.

Теорема 3. 2. *1) Пусть γ гладкая дуга на границе области G ($z = z(s)$, $0 \leqslant s \leqslant s_1$, s — длина дуги γ от $z(0)$ до $z(s_1)$) и $w = f(z, \gamma)$ функция, конформно отображающая область G на круг $|w| < 1$. Тогда, если угол $\alpha(s)$, образуемый положительным направлением касательной к γ в точке $z(s)$ с положительным направлением оси x-ов удовлетворяет условию Гельдера с показателем δ ($0 < \delta \leqslant 1$),*

$$|\alpha(s+h) - \alpha(s)| < K|h|^{\delta}, \tag{1}$$

то на γ существует конечное растяжение

$$\lambda(s) = \ln\left|\frac{\partial f(z(s))}{\partial s}\right|, \qquad (0 < s < s_1), \tag{2}$$

удовлетворяющее условию Гельдера с тем же показателем δ, если $\delta < 1$,

$$|\lambda(s+h) - \lambda(s)| < K_1|h|^{\delta}, \tag{3}$$

и условию

$$|\lambda(s+h) - \lambda(s)| < K_1|h|\left|\ln\frac{1}{|h|}\right|, \tag{4}$$

если $\delta = 1$, *причем K_1 зависит от G, K, δ и расстояния точек z, $z+h$ от концов дуги γ.*

2) Если $\alpha(s)$ имеет производные до n-го порядка и $\alpha^{(n)}(s)$ удовлетворяет условию вида (1) с $0 < \delta < 1$, то $\lambda(s)$ *также обладает производными до n-го порядка и $\lambda^{(n)}(s)$ удовлетворяет условию вида (3).*

3) *Если* $\alpha(s)$ *удовлетворяет интегральному условию Гельдера,*

$$\int\limits_{0}^{s_1} \frac{|\alpha(s) - \alpha(s_0)|}{|s - s_0|} \, ds < \infty , \tag{5}$$

то растяжение $\lambda(s_0)$ *существует и непрерывно для* $0 < s_0 < s_1$.

Отметим одно важное следствие:

Если граница области G *содержит гладкую дугу* γ *с кусочно непрерывной кривизной, то функция* $f(z, \gamma)$ *непрерывно дифференцируема на* γ *и производная* $\frac{\partial f}{\partial s} \neq 0$.

В самом деле, в рассматриваемом случае производная $\alpha'(s)$ кусочно непрерывна на γ, значит функция удовлетворяет на γ условию Липшица

$$|\alpha(s+h) - \alpha(s)| < K|h|, \tag{6}$$

откуда следует, что растяжение $\lambda(s)$ удовлетворяет условию (4), что сильнее того, что утверждается в следствии.

Примечание. В частности это следствие применимо к случаю гладкого сопряжения двух дуг окружностей разной кривизны или дуги окружности и отрезка прямой. В этом случае, минуя теорему 3. 2, легко показать, что отображающая функция вблизи точки сопряжения (пусть там $z = 0$) имеет вид

$$f(z, \gamma) = \frac{cz}{(1 + c_1 z + \ldots) + z \ln z}, \tag{7}$$

откуда следует, что вблизи $z = 0$

$$|f'(z, \gamma) - f'(0, \gamma)| < \text{const} \, |z \ln |z|| .$$

3. 4. Однолистные конформные отображения односвязных областей.

Определение 3. 3. *Отображение* $f(z)$ *области* G *называется однолистным, если разным точкам* $z \in G$ *соответствуют разные значения* $f(z)$.

Из общего курса теории функций комплексного переменного известны следующие два критерия:

Критерий однолистности отображения в малом. *Для того, чтобы отображение* $f(z)$ *было однолистным в достаточно малой окрестности точки* z_0, *регулярной для* $f(z)$, *необходимо и достаточно, чтобы* $f'(z_0) \neq 0$, *если* $z_0 \neq \infty$ *и если* $z_0 = \infty$, *чтобы разложение* $f(z)$ *в* ∞ *имело вид* $c_0 + \frac{c_1}{z} + \ldots (c_1 \neq 0)$; *если же* z_0 *особая точка* $f(z)$, *ко-*

нечная или нет, то необходимо и достаточно, чтобы она являлась полюсом первого порядка для $f(z)$.

Критерий однолистности отображения области (принцип соответствия границ). *Пусть область G ограничена спрямляемым жордановым контуром* Γ. *Если функция $f(z)$, аналитическая в G, и непрерывно дифференцируемая на* Γ *переводит* Γ *взаимно однозначно и непрерывно в линию* Γ', *то $f(z)$ отображает область G взаимно однозначно и конформно на область G', ограниченную* Γ'.

Приведем теперь несколько теорем об однолистных отображениях круга $|z|<1$, имеющих вид

$$f(z)=z+a_2z^2+a_3z^3+\ldots \tag{1}$$

Теорема 3. 3. *Для однолистных конформных отображений* (1) *круга $|z|<1$ справедливы неравенства*

$$\frac{|z|}{(1+|z|)^2}\leqslant|f(z)|\leqslant\frac{|z|}{(1-|z|)^2}, \tag{2}$$

$$\frac{1-|z|}{(1+|z|)^3}\leqslant|f'(z)|\leqslant\frac{1+|z|}{(1-|z|)^3}, \tag{3}$$

которые обращаются в равенство только для функций

$$f(z)=\frac{z}{(1+e^{i\alpha}z)^2}. \tag{4}$$

Примечание. Если $f(z)$ имеет вид

$$f(z)=f(0)+f'(0)z+\ldots, \tag{5}$$

то, рассматривая

$$\varphi(z)=\frac{f(z)-f(0)}{f'(0)}, \tag{6}$$

получаем вместо (2) и (3) более общие неравенства

$$|f'(0)|\frac{|z|}{(1+|z|)^2}\leqslant|f(z)-f(0)|\leqslant|f'(0)|\frac{|z|}{(1-|z|)^2}, \tag{7}$$

$$|f'(0)|\frac{1-|z|}{(1+|z|)^3}\leqslant|f'(z)|\leqslant|f'(0)|\frac{1+|z|}{(1-|z|)^3}. \tag{8}$$

Кроме того, если d расстояние от точки $f(0)$ до границы области G, на которую $f(z)$ отображает круг $|z|<1$, то из принципа Линделёфа следует, что $|f'(0)|\geqslant d$ (равенство для круга радиуса d с центром в точке $f(0)$), а из (7) следует, что $|f'(0)|\leqslant 4d$ (равенство для $\varphi(z)$, имеющей вид (4)), таким образом

$$d\leqslant|f'(0)|\leqslant 4d. \tag{9}$$

При тех же условиях имеет место следующая теорема:

Теорема 3. 4. *При однолистном конформном отображении $f(z)$ круга $|z|<1$ для всяких двух точек $z_1 \neq z_2$, лежащих в круге $|z|<r<1$, выполняется неравенство*

$$\left|\frac{f(z_1)-f(z_2)}{z_1-z_2}\right| < |f'(0)|\frac{1+r}{(1-r)^3} < \frac{8d}{(1-r)^3}. \tag{10}$$

Доказательство. Имеем

$$|f(z_2)-f(z_1)| = \left|\int_{z_1}^{z} f'(z)dz\right| \leqslant |z_2-z_1|\cdot\max_{|z|\leqslant r}|f'(z)|$$

и (10) следует из (8) и (9).

Теорема 3. 5. *Если функция $f(z)$ производит однолистное конформное отображение круга $|z|<1$ и $f(0)=0$, то для всяких двух точек z_1, z_2 круга $|z|<r<1$, отличных от нуля, выполняются неравенства*

$$\left(\frac{1-r}{1+r}\right)^2\left|\frac{z_1}{z_2}\right| \leqslant \left|\frac{f(z_1)}{f(z_2)}\right| \leqslant \left(\frac{1+r}{1-r}\right)^2\left|\frac{z_1}{z_2}\right|, \tag{11}$$

$$\left|\arg\frac{f(z_1)}{f(z_2)}-\arg\frac{z_1}{z_2}\right| \leqslant 2\ln\frac{1+r}{1-r} < \frac{4r}{1-r}. \tag{12}$$

Доказательство. Неравенство (11) следует из (7), а неравенство (12) — из точного неравенства

$$\left|\arg\frac{f(z)}{z}\right| \leqslant \ln\frac{1+|z|}{1-|z|}, \tag{13}$$

приводимого у Г. М. Голузина ([16], стр. 140). Если воспользоваться известным соотношением $|a_n|<en$ для коэффициентов (1) (можно считать, что $f'(0)=1$), то для $|z|\leqslant r$ будем иметь

$$\left|\frac{f(z)}{z}-1\right| < e(2r+3r^2+\ldots) = \frac{e(2r-r^2)}{(1-r)^2} < \frac{2er}{(1-r)^2},$$

откуда следует, что

$$\left|\arg\frac{f(z_1)}{f(z_2)}-\arg\frac{z_1}{z_2}\right| = \left|\arg\frac{f(z_1)}{z_1}-\arg\frac{f(z_2)}{z_2}\right| < \frac{4er}{(1-r)^2}, \tag{14}$$

что слабее (12), но выводится проще и порой достаточно.

Примечание. Если исходить из известной гипотезы, что в (1) $|a_n|\leqslant n$ (вопрос об истинности этой гипотезы составляет так называемую *проблему коэффициентов*), то получаем (14) справа без множителя e, что все же хуже (12).

Так как в условиях теоремы 3. 5, $\frac{f(z)}{z}\to f'(0)$ при $z\to 0$, то $\left|\frac{f(z)}{z}\right| \to |f'(0)|$ и $\arg\frac{f(z)}{z} \to \arg f'(0)$, поэтому ясно, что при малых r отношение $\frac{f(z_1)}{f(z_2)}$ мало отличается от отношения $\frac{z_1}{z_2}$. Из теоремы 3. 5 следует равномерная малость этого отклонения для всего рассматриваемого семейства отображений. В своей работе М. А. Лаврентьев [15] выражает это в виде следующей теоремы:

Теорема 3. 6. *Пусть $f(z)$ производит однолистное конформное отображение круга $|z| < 1$ и $f(0) = 0$. Тогда для любого $\eta_0 > 0$ можно указать такие ε_0, $0 < \varepsilon_0 < 1$ и $m_0 > 0$, зависящие только от η_0, что для всяких двух точек z_1, z_2 кольца*

$$(1-\varepsilon)\frac{1}{m} < |z| < \frac{1}{m}, \tag{15}$$

где $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ и $m > m_0$, имеет место неравенство

$$\left|\frac{f(z_1)}{f(z_2)}\right| < 1+\eta_0, \quad \left|\arg\frac{f(z_1)}{f(z_2)} - \arg\frac{z_1}{z_2}\right| < \eta_0. \tag{16}$$

Доказательство. (16) следует из (11) и (12), коль скоро

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| \left(\frac{1+r}{1-r}\right)^2 < 1+\eta_0, \quad 2\ln\frac{1+r}{1-r} < \eta_0, \tag{17}$$

где $|z_1|$, $|z_2| < r$. В силу (15) имеем $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| < \frac{1}{1-\varepsilon}$ и $r = \frac{1}{m}$, поэтому (17) принимаст вид

$$\left(\frac{m+1}{m-1}\right)^2 \frac{1}{1-\varepsilon} < 1+\eta_0, \quad 2\ln\frac{1+\frac{1}{m}}{1-\frac{1}{m}} < \eta_0. \tag{18}$$

Так как левые части (18) с возрастанием m и убыванием ε монотонно стремятся к 1, то можно подобрать m_0 и ε_0, удовлетворяющие (18), а тогда для $m > m_0$ и $\varepsilon < \varepsilon_0$ неравенства (18), а также и неравенства (16) имеют место и подавно.

Примечание. В дальнейшем теорему 3. 6 мы будем иногда называть *теоремой об искажении колец при однолистных конформных отображениях.*

3. 5. Однолистные конформные отображения двусвязных областей.

Теорема 3. 7. *Всякую двусвязную область G можно взаимно однозначно и конформно отобразить на одну из следующих областей:*

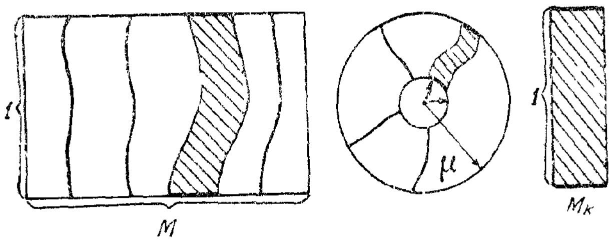
1) $0 < |z| < \infty$;
2) $1 < |z| < \infty$;
3) $1 < |z| < \mu$.

В последнем случае число μ определяется областью G однозначно.

Примечание. Число $\mu=\mu(G)$, указанное в теореме 3. 7, называется *модулем области* G. Если G отображается на область $1<|z|<\infty$, то $\mu(G)=\infty$. По теореме 3. 7 все двусвязные области распадаются на классы конформно эквивалентных между собой областей.

С помощью логарифмической функции кольцо $1<|z|<\mu$ с радиальным разрезом отображается на прямоугольник с отношением сторон (основание к высоте) $M=\frac{\ln\mu}{2\pi}$, называемым *модулем прямоугольника*. Точно также всякий четырехугольник, представленный односвязной областью с четырех отмеченными граничными точками, можно конформно отобразить на прямоугольник, вершины в вершины, с вполне определенным модулем, называемым *модулем четырехугольника* (должно быть указано, что принимается за основание четырехугольника).

Имеет место следующий важный принцип Грётша:



Чертеж 3. 1

1°. *Если прямоугольник с модулем M разбит с помощью взаимно простых жордановых дуг, соединяющих его основания, на четырехугольники с модулями M_k ($k=1, 2, \ldots, n$),* то

$$M \geqslant \sum_{k=1}^{n} M_k \tag{1}$$

с равенством только в случае разбиения прямоугольника отрезками, параллельными его боковым сторонам.

2°. *Если кольцо с модулем μ разбито с помощью взаимно простых жордановых дуг, соединяющих его граничные окружности, на четырехугольники с модулями M_k (за основание этих четырехугольников принимаются их стороны, лежащие на граничных окружностях), то*

$$\frac{2\pi}{\ln\mu} \geqslant \sum_{k=1}^{n} M_k \tag{2}$$

с равенством только в случае разбиения кольца с помощью радиальных сечений (черт. 3. 1).

Примечание. Если в 1° разбиение прямоугольника производится жордановыми дугами, соединяющими его боковые стороны и эти дуги принимаются в дальнейшем за основания, то

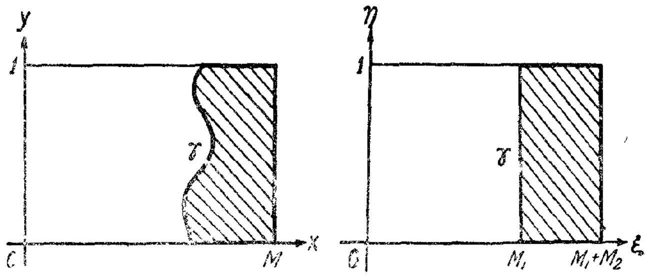
$$\frac{1}{M} \geqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{M_k} \tag{3}$$

с равенством только в случае разбиения прямоугольника отрезками, параллельными его основаниям. Аналогично, если в 2° кольцо разбивается с помощью взаимно простых замкнутых жордановых кривых на двусвязные области с модулями μ_k, то

$$\frac{\ln \mu}{2\pi} \geqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln \mu_k}{2\pi} \quad \text{или} \quad \mu \geqslant \prod_{k=1}^{n} \mu_k \tag{4}$$

с равенством только в случае разбиение на концентрические круговые кольца.

Доказательство принципа Грётша по существу достаточно провести для случая разбиения прямоугольника с помощью одной лишь дуги, соединяющей его основания. Отображая получаемые при этом два четырехугольника на прямоугольники вершины в вершины, и рассматривая возникающее при этом кусочно конформное отображение $z = f(\zeta)$ (черт. 3. 2), имеем



Чертеж 3. 2

$$M = \int_{0}^{M_1+M_2} d\xi \int_{0}^{1} |f'(\zeta)|^2 \, d\eta$$

и, так как очевидно

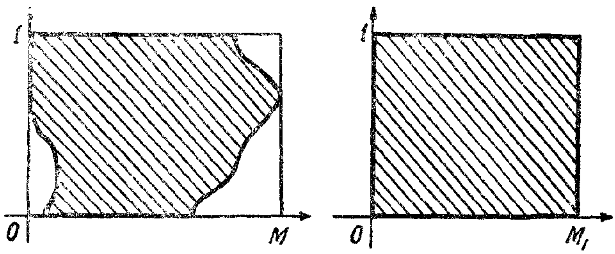
$$\int_{0}^{1} |f'(\zeta)| \, d\eta = \partial л. (\gamma) \geqslant 1,$$

то, по неравенству Буняковского,

$$\int_0^1 |f'(\zeta)|^2 d\eta \geqslant 1,$$

следовательно, $M \geqslant M_1 + M_2$ с соответствующим утверждением о случае равенства.

Аналогично доказывается следующий принцип модуля двусвязных областей и четырехугольников: *при расширении двусвязной области модуль ее увеличивается; при расширении четырехугольника со стороны боковых сторон и сжатии со стороны оснований, модуль его увеличивается* (доказательство достаточно провести для случая, указанного на чертеже 3. 3).



Чертеж 3. 3

Для однолистных нормированных отображений кольца имеют место экстремальные оценки, аналогичные рассмотренным выше для случая однолистных нормированных отображений круга. Основные из них содержатся в следующей теореме Грётша [19]:

Теорема 3. 8. *Пусть $\{f(z)\}$ класс однолистных конформных отображений кольца $K_r: r < |z| < 1$ на двусвязные области, ограниченные окружностью $|z| = r$ и каким-либо континуумом, уходящим в ∞. Путь $\varphi(z)$ функция того же класса, отображающая K_r на область $|z| > r$ с разрезом (ρ, ∞), $\rho = \rho(r)$, вдоль положительной действительной оси. Тогда*

$$\varphi(|z|) \leqslant |f(z)| \leqslant \varphi(-|z|), \tag{5}$$

$$\varphi'(|z|) \leqslant |f'(z)| \leqslant \varphi'(-|z|) \tag{6}$$

для всех функций класса и всех $r \leqslant |z| \leqslant 1$, причем равенство возможно только для функций $f(z) = e^{i\alpha}\varphi(e^{i\beta}z)$.

Примечание 1. При дополнительном требовании, чтобы $|f(z)| < M$, $M > 1$, экстремальное отображение получается при отображении K_r на кольцо $r < |w| < M$ с радиальным разрезом (ρ, M), $\rho = \rho(r, M)$. При этом в (5), (6) имеют место только оценки снизу.

Примечание 2. При $r \to 0$ (5), (6) переходят в экстремальные оценки 3. 4 (2), 3. 4 (3) для нормированных однолистных отображений круга $|z| < 1$.

Примечание 3 Если кольцо K_r отображать на области, ограниченные окружностью $|z| = 1$ и континуумом, проходящим через начало координат, то экстремальной областью будет круг $|z| < 1$ с радиальным разрезом $(0, \rho)$ и вместо (5) и (6) имеют место оценки

$$\varphi(-|z|) \leq |f(z)| \leq \varphi(|z|), \tag{7}$$

$$|f'(z)| \geq \varphi'(|z|), \tag{8}$$

где $\varphi(z)$ означает экстремальную функцию, $f(z)$ - любую функцию класса и $r < |z| < 1$.

Из приведенной теоремы Грётша следует, что указанные экстремальные области при данном r дают наибольшее сближение обоих границ рассматриваемых двусвязных областей. Это важное для нас утверждение мы сейчас докажем.

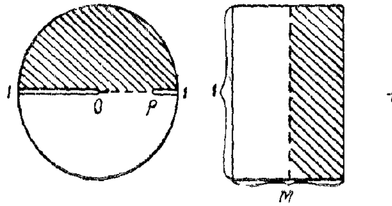
Пусть $w = f(z)$ отображает K_r на круг с радиальным разрезом $(0, \rho)$. Утверждение, что $1 - \rho$ есть наименьшее возможное расстояние от $|w| = 1$ до внутренних граничных континуумов областей $f(K_r)$ равносильно тому, что при заданном расстоянии d, $0 < d < 1$, между $|w| = 1$ и указанными континуумами наименьшее значение r получается в случае круга $|w| < 1$ с радиальным разрезом $(0, \rho)$, $\rho = 1 - d$ или, что то же самое, *среди всех двусвязных областей, ограниченных окружностью $|w| = 1$ и проходящим через $w = 0$ континуумом, отстоящим от $|w| = 1$ на расстояние d, наибольший модуль имеет только круг с радиальным разрезом.* Именно это мы и будем доказывать.

Обозначим через G_ρ круг $|w| < 1$ с радиальным разрезом $(0, \rho)$ и через μ его модуль. Отображая круг $|w| < 1$ с разрезами $(-1, 0)$, $(\rho, 1)$ на прямоугольник R, разрезы в основания, найдем, что его модуль $M = \frac{2 \ln \mu}{\pi}$ (см. черт. 3. 4)

Заметив это, рассмотрим произвольную двусвязную область G_0', ограниченную $|w| = 1$ и континуумом γ, проходящим через $w = 0$ и отстоящим от $|w| = 1$ на расстояние $1 - \rho$. Не нарушая общности, можно считать, что γ проходит через точку $w = \rho$

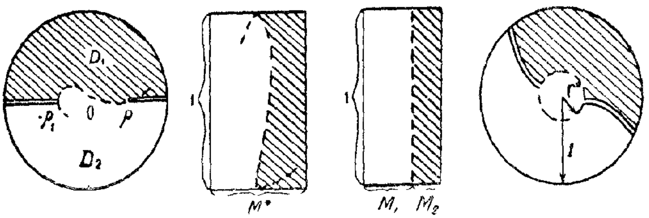
Отображая круг $|w| < 1$ с разрезами $(-1, -\rho_1)$, $(\rho, 1)$, где $w = -\rho_1$, $\rho_1 > 0$, первая точка встречи с γ при движении по радиусу от $w = -1$ к $w = 0$, на прямоугольник, пусть R, с модулем M^*, найдем по принципу модуля, что $M^* < M$, если $\rho_1 > 0$.

Континуум γ вместе с сечениями $(-1, -\rho_1)$, $(\rho, 1)$ и окружностью $|w| = 1$ ограничивает в $|w| < 1$ два четырехугольника



Чертеж 3.4

D_1, D_2 с одинаковыми основаниями $(-1, -\rho_1)$, $(\rho, 1)$; если M_1 и M_2 модули этих четырехугольников, то, по принципу Грётша, $M^* \geqslant M_1 + M_2$, с равенством только для γ, совпадающего с отрезком $(-\rho_1 > \rho)$ (образ γ в R^* может и не быть простым сечением — например, черт. 3. 5, — в этом случае,



Чертеж 3.5

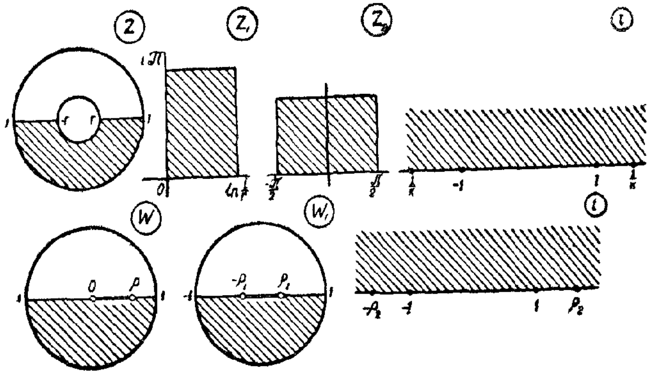
пользуясь принципом Грётша в соединении с принципом модуля, находим, что $M > M_1 + M_2$).

Пусть μ^* модуль G_ρ^*. При отображении G_ρ^* на кольцо образы отрезков $(-1, -\rho_1)$, $(0, \rho)$ разбивают это кольцо на два четырехугольника, конформно эквивалентные D_1 и D_2. Из принципа Грётша следует, что $\frac{2\pi}{\ln \mu^*} \geqslant \frac{1}{M_1} + \frac{1}{M_2}$, откуда легко следует $\left(\text{если } \frac{1}{\tilde{M}} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{M_1} + \frac{1}{M_2} \right), \text{ то } \tilde{M} \leqslant \frac{M_1 + M_2}{2} \right)$, что $\frac{2 \ln \mu^*}{\pi} \leqslant M_1 + M_2$ и, так как $M_1 + M_2 \leqslant M^* < M = \frac{2 \ln \mu}{\pi}$, то $\mu^* < \mu$, что и требовалось доказать.

Что касается самого экстремального отображения, то его можно представить в виде цепочки элементарных отображений (черт. 3. 6):

$$\begin{cases} z_1 = -\ln z \\ z_2 = \frac{\pi}{2} + iz_1 = \operatorname{sn} t \text{ (функция Якоби)}, \end{cases} \tag{9}$$

$$\begin{cases} w = \frac{w_1 + \rho_1}{1 + w_1\rho_1}, \quad \rho = \frac{2\rho_1}{1 + \rho_1^2}, \quad \rho_1 = \frac{1 - \sqrt{1 - \rho^2}}{\rho} \\ t = \frac{1}{2}\left(w_1 + \frac{1}{w_1}\right), \quad \rho_2 = \frac{1 + \rho_1^2}{2\rho_1} = \frac{1}{\rho}. \end{cases} \tag{10}$$



Чертеж 3. 6

Из сравнения (9) и (10) следует, что $k = \rho$; с другой стороны, из (9) следует, что k связано с r соотношениями

$$K = \frac{\pi}{2}, \quad K' = \ln\frac{1}{r}, \tag{11}$$

где K и K' полные эллиптические интегралы первого рода, соответствующие k и $k' = \sqrt{1 - k^2}$. Это приводит к соотношению.

$$\ln\frac{1}{r} = \frac{\pi}{2}\,\frac{K'}{K}, \tag{12}$$

определяющему зависимость между r и ρ.

Литература к 3. 1 — 3. 5. Большая часть материала имеется в книге [16], гл. I, II, IV и, исключая подробное рассмотрение случая двусвязных областей, в книге [17], гл. V, §§ 1—3. Доказательство теоремы 3. 1 имеется в работе [18], теоремы 3. 8 — в работе [19]. Для нужных нам частей этих теорем мы доказательство привели выше.

§ 4. ИЗ ТЕОРИИ ПОВЕРХНОСТЕЙ

4. 1. Отображение поверхности на плоскую область (см. [20], гл. V). Пусть в пространстве (ξ, η, ζ) дана поверхность S и пусть функции

$$\xi = \xi(x, y), \quad \eta = \eta(x, y), \quad \zeta = \zeta(x, y) \tag{1}$$

осуществляют однолистное дифференцируемое отображение на S области D плоскости $z = x + iy$. Это отображение определяет на S криволинейную систему координат (x, y). Пусть

$$\bar{r} = \bar{r}(x, y) = \xi\bar{i} + \eta\bar{j} + \zeta\bar{k} \tag{2}$$

радиус-вектор произвольной точки $M \in S$. Тогда вектора

$$\begin{aligned} \bar{r}_k &= \xi_x\bar{i} + \eta_x\bar{j} + \zeta_x\bar{k} \\ \bar{r}_y &= \xi_y\bar{i} + \eta_y\bar{j} + \zeta_y\bar{k} \end{aligned} \tag{3}$$

определяют на S касательные к координатным линиям $y = \text{const}$, $x = \text{const}$, соответственно. Если вектора $\bar{r}_x$, $\bar{r}_y$ отличны от нуля и между собой не параллельны, что мы будем предполагать, то вместе они определяют на S касательную плоскость, причем касательная к произвольной линии

$$\bar{r} = \bar{r}\,[x(t), y(t)] \tag{4}$$

на S определяется вектором (см. черт. 4. 1)

$$d\bar{r} = \bar{r}_x dx + \bar{r}_y dy. \tag{5}$$

Из (5) следует, что

$$ds^2 = |\,d\bar{r}\,|^2 = (d\bar{r})^2 = \bar{r}_x^2 dx^2 + 2\bar{r}_x\bar{r}_y dxdy + \bar{r}_y^2 dy^2$$

или

$$ds^2 = Edx^2 + 2Fdxdy + Gdy^2, \tag{6}$$

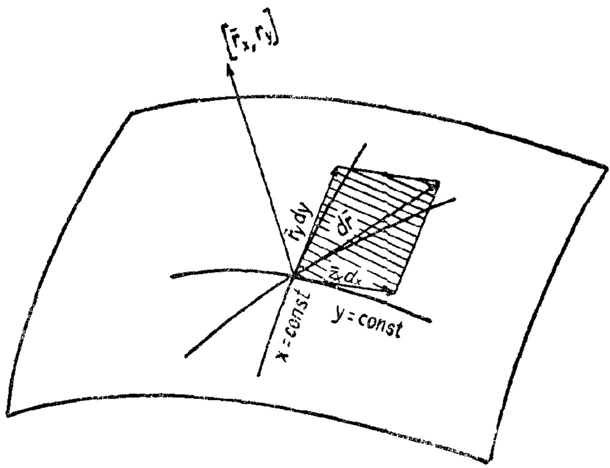
где

$$\left.\begin{aligned} E &= \bar{r}_x^2 = \xi_x^2 + \eta_x^2 + \zeta_x^2, \\ F &= \bar{r}_x\bar{r}_y = \xi_x\xi_y + \eta_x\eta_y + \zeta_x\zeta_y, \\ G &= \bar{r}_y^2 = \xi_y^2 + \eta_y^2 + \zeta_y^2. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

При этом

$$W = EG - F^2 > 0. \tag{8}$$

В самом деле, известно, что $\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \sum_{k=1}^{n} b_k^2$ с равенством только для $\frac{a_1}{b^1} = \frac{a_2}{b_2} = \ldots = \frac{a_n}{b_n}$, поэтому $F^2 \leqslant EG$ с равенством только для $\xi_x : \eta_x : \zeta_x = \xi_y : \eta_y : \zeta_y$, то есть в случае параллельности векторов $\bar{r}_x$ и $\bar{r}_y$; у нас же эти вектора, по предположению, отличны от нуля и не параллельны.



Чертеж 4.1

Далее ясно, что для двух направлений $d\bar{r}$, $\delta\bar{r}$ имеем

$$\cos(d\bar{r}, \delta\bar{r}) = \frac{d\bar{r}\,\delta\bar{r}}{|d\bar{r}|\,|\delta\bar{r}|} =$$

$$= \frac{Edx\delta x + F(dx\delta y + dy\delta x) + Gdy\delta y}{\sqrt{Edx^2 + 2Fdxdy + Gdy^2}\,\sqrt{E\delta x^2 + 2F\delta x\delta y + G\delta y^2}}. \tag{9}$$

В частности, полагая $dy = \delta x = 0$, получаем для угла ω между координатными линиями соотношение

$$\cos\omega = \frac{F}{\sqrt{EG}}, \tag{10}$$

откуда видно, что координатные линии взаимно ортогональны только при $F = 0$.

Для вычисления площади поверхности имеем соотношения:

$$\left.\begin{aligned} dS &= |[\bar{r}_x dx, \bar{r}_y dy]| = |[\bar{r}_x, \bar{r}_y]|\, dxdy = \sqrt{EG-F^2}\, dxdy, \\ S &= \iint \sqrt{EG-F^2}\, dxdy. \end{aligned}\right\} \quad (11)$$

Заметим еще следующее. Считая в (6) ds постоянным, а dx, dy — переменными, получаем на S бесконечно малый кружок радиуса $|d\bar{r}| = ds$ (строго говоря — в касательной плоскости), а в области D — бесконечно малый эллипс. Требование, чтобы $\bar{r}_x$, $\bar{r}_y$ были отличны от нуля и не были параллельны между собой эквивалентно тому, что отображение (2) ведет себя в малом как не вырожденное аффинное отображение (5).

4. 2. Поверхность $\{D, ds^2\}$. По отношению к поверхности S отображение ее на плоскую область D означает введение криволинейных координат (x, y). Свойства S, зависящие только от коэффициентов ds^2, называются *внутренними свойствами* S: к ним относится измерение углов, определение геодезических, то есть линий, вдоль которых на S достигается кратчайшее расстояние между двумя точками, определение полной гауссовой кривизны и др. (см. [20, 21]). Примером изометричной (сохраняющей метрику) деформации поверхности S служит ее *изгибание*.

По отношению же к области D отображение S на D означает введение неевклидовой метрики, в которой элементу $dz = dx + idy$ приписывается неевклидова длина ds,

$$ds^2 = Edx^2 + 2Fdxdy + Gdy^2 \quad (1)$$

и двум элементам $dz = dx + idy$, $\delta z = \delta x + i\delta y$, выходящим из одной и той же точки $z \in D$, приписывается неевклидов угол t, определяемый из соотношения

$$\cos t = \frac{Edx\delta x + F(dx\delta y + dy\delta x) + Gdy\delta y}{ds\delta s}. \quad (2)$$

В малом аффинное отображение $\bar{r} = \bar{r}(z)$ области D на поверхность S, рассмотренное выше, превращает указанное неевклидово мероопределение в D в обычное евклидово на S.

Представим себе теперь, что поверхность S нам не дана, но в области D определена метрическая форма (1). Тогда область D с неевклидовой метрикой, определяемой в ней метрической формой ds^2, выражает метрические свойства всех тех поверхностей $\{S\}$, которые могут быть отображены на D так, что их метрика переходит в указанную неевклидову метрику в D. Больше того, мы можем на самую область D с метрической формой ds^2, то есть на $\{D, ds^2\}$, смотреть как на некоторую поверхность Ф, реализованную в виде евклидовой области D. Если стать на эту общую точку зрения, то отпадает необходимость заранее иметь поверхность S, может даже оказаться, что в трехмерном евклидовом пространстве такой поверхности и не существует.

В качестве примера достаточно указать на интерпретацию геометрии Лобачевского в единичном круге $|z|<1$, получаемую с помощью метрической формы (см. [22], гл. III, § 2):

$$ds^2 = \frac{|dz|^2}{1-|z|^2}. \tag{3}$$

Здесь $E=G$, $F=0$, поэтому соответствующая угловая метрика определяемая (2), совпадает с евклидовой, роль же прямых (геодезических) играют, как можно показать (см. [22], там же), дуги окружностей, ортогональных к окружности $|z|=1$. Круг $|z|<1$ с метрикой (3) дает нам пример поверхности $\{D, ds^2\}$, не имеющей изометричного эквивалента в евклидовом пространстве, ибо, по одной из теорем Гильберта (см. [23], § 60), в евклидовом пространстве не существует поверхности, изометричной *всей* плоскости Лобачевского.

Рассмотрим теперь две поверхности $\{D, ds^2\}$, и $\{D, ds_1^2\}$, где ds_1^2 другая метрическая форма с коэффициентами E_1, F_1, G_1 и поставим вопрос о том, когда соответствие, устанавливаемое между ними посредством D (соответствующими друг другу будут те точки этих поверхностей, которые соответствуют одинаковым точкам $z \in D$), будет конформным, то есть в каком случае неевклидовы мероопределения углов, соответствующие ds^2 и ds_1^2 в области D, совпадают. Ответ на этот вопрос дает следующая теорема:

Теорема 4. 1. *Для совпадения неевклидовых мероопределений углов, соответствующих в области D метрическим формам ds^2 и ds_1^2, необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты этих форм, E, F, G и E_1, F_1, G_1 были взаимно пропорциональны*

$$\frac{E_1}{E} = \frac{F_1}{F} = \frac{G_1}{G}. \tag{4}$$

Доказательство. В силу (2) вопрос идет о том, когда

$$\frac{E\,dx\delta x + F(dx\delta y + dy\delta x) + G\,dy\delta y}{ds\delta s} =$$

$$= \frac{E_1\,dx\delta x + F_1(dx\delta y + dy\delta x) + G_1\,dy\delta y}{ds_1\delta s_1}, \tag{5}$$

для любых $dz = dx + i\delta y$ и $\delta z = \delta x + idy$. Полагая в (5) $dx = \delta y = 0$, получаем соотношение

$$\frac{F}{\sqrt{EG}} = \frac{F_1}{\sqrt{E_1 G_1}}. \tag{6}$$

Полагая $dy = dx$, $\delta y = -\delta x$, получаем соотношение

$$\frac{E - G}{\sqrt{(E+G)^2 - 4F^2}} = \frac{E_1 - G_1}{\sqrt{(E_1 + G_1)^2 - 4F_1^2}}. \tag{7}$$

Если $E = G$, то $E_1 = G_1$ и (4) следует из (6). Если же $E \neq G$, то из (7) следует, что

$$\frac{EG - F^2}{(E-G)^2} \qquad \frac{E_1 G_1 - F_1^2}{(E_1 - G_1)^2}$$

или, с учетом (6),

$$\frac{EG}{(E-G)^2} = \frac{E_1 G_1}{(E_1 - G_1)^2},$$

откуда

$$\frac{EG}{(E+G)^2} = \frac{E_1 G_1}{(E_1 + G_1)^2},$$

следовательно

$$\frac{E+G}{E-G} = \frac{E_1 + G_1}{E_1 - G_1}$$

(из (7) следует, что если $E > G$, то $E_1 > G_1$), откуда $\frac{E}{E_1} = \frac{G}{G_1}$ и из (6) следует (4). Обратное утверждение, что из (4) следует (5), очевидно.

ЛИТЕРАТУРА К ПРИЛОЖЕНИЮ

1. Натансон И. П. Теория функций вещественной переменной, 1950.
2. Валле-Пуссен. Курс анализа бесконечно малых, т. II, 1933.
3. Сакс С. Теория интеграла, 1949.
4. Carathéodory C. Vorlesungen über reelle Funktionen.
5. Лузин Н. Н. Интеграл и тригонометрический ряд, 2 изд., 1951.
6. Denjoy A. Memoire sur les nombres dérivés des fonctions continues. Journ. Math. Pures et Appl. (7) 1, 105—240. 1915.
7. Sierpinski W. Sur un probléme concernant les ensembles mesurables superficiellement. Fund. Math., 1, 112—115. 1920.
8. Menchoff D. Sur la représentations conforme des domaines plans. Math. Annalen, 95, 640—670. 1926.

9. Bary N. Memoire sur la représentations finie des fonctions continues. Math. Annalen, 103, 185—248. 1930.

10. Александров П. С. Введение в общую теорию функций и множеств, 1948.

11. Курант Р. и Гильберт Д. Методы математической физики т. II, 1945.

12. Петровский И. Г. Лекции об уравнениях с частными производными, 1950.

13. Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений, 1950.

14. Соболев С. Л. Уравнения математической физики, 1947.

15. Lavrentieff M. Sur une classe de représentations continues. Матем. сб., 42, стр. 407—424, 1935.

16. Голузин Г. М. Геометрическая теория функций комплексного переменного, 1952.

17. Маркушевич А. И. Теория аналитических функций, 1950.

18. Warschawski S. Über das Randverhalten der Ableitung der Abbildungsfunktion bei konformer Abbildung. Math. Zeitsch., 35, 322—452. 1932.

19. Grötzsch H. Über einige Extremalprobleme der konformen Abbildung. Sitzungsberichte der Sächs. Akad. der Wiss., 80, 367—376. 1928

20. Рашевский П. К. Курс дифференциальной геометрии, 1950.

21. Ефимов Н. В. Высшая геометрия, 1949.

22 Привалов. И. И. Введение в теорию функций комплексного переменного, 1948.

23 Каган. В. Ф. Основы теории поверхностей, ч. II, 1948.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Технический редактор В. Ф. Любченко

Корректор С. А. Харитонова

БГ 13173. Зак. 260. Бумага $60 \times 92^{1}/_{16}$. Печатных лист. $9^{3}/_{4}$. Учетно-издат. лист. 10. Сдано в набор 1/III 1954 г. Подписано к печати 6/IX 1954 г. Тираж 500 экз. Цена 5 руб.

Типография научно-технической книги Главиздата
Министерства культуры УССР,
Львов, Чайковского, 27.